Contrôle continu du 14 février 2020, 8h00-10h00.

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. Dessiner les sous-ensembles suivants du plan complexe $\mathbb{C}$:

a. $\{z \in \mathbb{C} \big| z\bar{z} = 1\}$
b. $\{z \in \mathbb{C} \big| z^2 + 1 = 0\}$
c. $\{z \in \mathbb{C} \big| z\bar{z} + 1 = 0\}$
d. $\{z \in \mathbb{C} \big| \operatorname{Im}(z) \geqslant 1\}$
e. $\{z \in \mathbb{C} \big| |z - i| < 3\}$
f. $\{z \in \mathbb{C} \big| \operatorname{Im}(z) + 2\operatorname{Re}(z) = 1\}$
g. $\{z \in \mathbb{C} \big| \frac{\pi}{6} \leqslant \arg(z - i) < \frac{\pi}{4}\}$

2.

a. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de :

$$(1+i)^3, \qquad \ln(-1-i),$$

b. Calculer le module et l'argument de :

$$-\sqrt{3} + i, \qquad \exp\big(2e^{\frac{5\pi i}{4}}\big).$$

3. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe. Calculer

$$\frac{\partial \operatorname{Re} f(z)}{\partial z}, \qquad \frac{\partial |f(z)|}{\partial \bar{z}},$$

en termes de $f(z)$, $f'(z)$.

4. Montrer que la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f : z = x + iy \mapsto e^x(x\cos y - y\sin y) + ie^x(x\sin y + y\cos y)$$

est holomorphe.

5. Trouver le domaine de convergence de la série entière centrée en 1 suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}(z-1)^n.$$

6. Quel est le rayon de convergence de la série entière centrée en 1 qui représente la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z-3)}.$$

Expliquer votre réponse.