Contrôle continu du 11 mars 2021, 17h00-19h00.

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. Dessiner les sous-ensembles suivants du plan complexe $\mathbb{C}$:

a. $\{z \in \mathbb{C} \big| z\bar{z} = 4\}$
b. $\{z \in \mathbb{C} \big| z^2 = -1\}$
c. $\{z \in \mathbb{C} \big| z\bar{z} + 1 = 0\}$
d. $\{z \in \mathbb{C} \big| \operatorname{Re}(z) \leqslant 1\}$
e. $\{z \in \mathbb{C} \big| |z + i| < 5\}$
f. $\{z \in \mathbb{C} \big| \operatorname{Im}(z) + 2\operatorname{Re}(z) = 1\}$
g. $\{z \in \mathbb{C} \big| -\frac{\pi}{3} \leqslant \arg(z - i) < \frac{\pi}{3}\}$

2.

a. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de :

$$(1-i)^3, \qquad \ln(-1-i),$$

b. Calculer le module et l'argument de :

$$-1 + i\sqrt{3}, \qquad \exp\left(\frac{1}{2}e^{\frac{3\pi i}{4}}\right).$$

3. Montrer que la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f : z = x + iy \mapsto e^{-x}(-x\cos y - y\sin y) + ie^{-x}(x\sin y - y\cos y)$$

est holomorphe, en vérifiant le équations de Cauchy-Riemann.

4. Soit $\mathcal{C}$ le chemin paramétré par la fonction $z(t) = 1 + e^{it}$ avec $t \in [0, \pi]$. En utilisant la définition de l'intégrale complexe calculer

$$\int_{\mathcal{C}} \operatorname{Im}(z)dz.$$

5. Trouver le domaine de convergence de la série entière suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n}(z-2)^n.$$

6. Quel est le rayon de convergence de la série entière centrée en i qui représente la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3i)}.$$

Expliquer votre réponse.