

Examen du 4 mai 2021, 13h30-15h30.

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. Dessiner les sous-ensembles suivants du plan complexe \mathbb{C} :

- a. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1 - i| < 1\}$
- b. $\{z \in \mathbb{C} \mid |\arg(z)| \leq \frac{\pi}{3}\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$

2. Calculer le module et l'argument de :

$$-1 - i\sqrt{3}, \quad \exp\left(-\frac{1}{2}e^{\frac{3\pi i}{4}}\right).$$

3. Trouver le domaine de convergence de la série entière centrée en 1 suivante :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^2(3(z-1))^n.$$

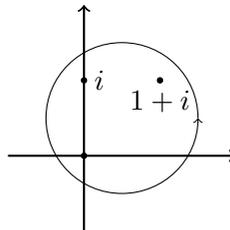
4. Déterminer la nature de tous les points singuliers de la fonction :

$$f(z) = \frac{1 - \sin(z)}{(\cos(z))^2}.$$

5. Calculer, en utilisant le théorème des résidus, l'intégrale suivante :

$$\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z(z-1-i)} dz$$

où γ est le chemin suivant



6. Calculer l'intégrale réelle suivante en utilisant les méthodes de l'analyse complexe :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx.$$