Examen du 10 juin 2021, 13h30-15h30.

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. Dessiner les sous-ensembles suivants du plan complexe $\mathbb{C}$:

a. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z+i| \leqslant 2\}$

b. $\{z \in \mathbb{C} \mid |\arg(z)| \leqslant \frac{\pi}{3}\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}(z)| \leqslant 1\}$

2. Calculer le module et l'argument de :

$$1-i, \qquad \exp\left(-\frac{1}{2}e^{\frac{\pi i}{3}}\right).$$

3. Quel est le rayon de convergence de la série entière centrée en i qui représente la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z+2i)\cos(z)}.$$

Expliquer votre réponse.

4. Soit $\mathcal{C}$ le chemin paramétré par la fonction $z(t) = \frac{1}{2}e^{it}$ avec $t \in [0, \pi/2]$. En utilisant la définition de l'intégrale complexe calculer

$$\int_{\mathcal{C}} \mathrm{Re}(z)dz.$$

5. Calculer, en utilisant le théorème des résidus, l'intégrale suivante :

$$\int_{|z-1|=1} \frac{e^z}{z^2-1}dz.$$

6. Calculer l'intégrale réelle suivante en utilisant les méthodes de l'analyse complexe :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^4+1)(2x^2+1)}dx.$$