Eléments de correction pour le partiel du 18 Mars 2022

Hervé Le Ferrand, L2 MaPC4A

19 mars 2022

exercice 1

a) 3 et -3...

b) C'est l'ensemble vide !

c) Le cercle de centre l'origine et de rayon 3.

d) Un demi-plan fermé.

e) Le disque ouvert de centre $-1-i$ et de rayon 1.

f) On pose $z = x + iy$, x et y réels, on a une équation de droite dans le plan.

g) Un demi cône de sommet 1.

exercice 2

a) $(-1-i)^3 = 2-2i$ (on développe ou on part de l'égalité $-1-i = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$) ; $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ donc $\log(1-i) = \frac{1}{2}\ln(2) - i\frac{\pi}{4}$.

b) $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$; $\exp(\frac{1}{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}) = \exp(-\frac{\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{2}}{4}) = e^{-\frac{\sqrt{2}}{4}}e^{-i\frac{\sqrt{2}}{4}}$.

exercice 3

Soit $f(z) = f(x+iy)$ une fonction holomorphe dans un domaine de $\mathbb{C}$. On sait que

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} \ ; \ if'(z) = \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{1}$$

Si $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, $u(x,y)$ et $v(x,y)$ vérifient les conditions de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ ; \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Calculons $\dfrac{\partial \Re(f(z))}{\partial z}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Re(f(z))}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ &= \frac{1}{2}f'(z). \end{aligned}$$

De la même façon on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Im(f(z))}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\
&= \frac{i}{2}\left(-i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \\
&= \frac{i}{2}\overline{f'(z)}.
\end{aligned}$$

exercice 4
On a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \bar{z} dz &= \int_0^1 te^{-it}(e^{it} + ite^{it})dt \\
&= \int_0^1 (t + it^2)dt \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{3}i.
\end{aligned}$$

exercice 5
Pour la première intégrale, la réponse est $2i\pi f(1)$. On applique en effet la formule intégrale de Cauchy à $f(z)/z$.

Pour la seconde intégrale, la réponse est 0 car $\frac{f(z)}{z(z-1)}$ est holomorphe dans un disque (par exemple) contenant ce cercle.

exercice 6
La série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{5^n} u^n$ a pour rayon de convergence 5 par le critère de D'Alembert, donc la série de Taylor proposée a pour domaine de convergence le disque de centre 5 et de rayon 5.