Contrôle continu du 18 mars 2022, 10h15-12h15.

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. Dessiner les sous-ensembles suivants du plan complexe $\mathbb{C}$:

a. $\{z \in \mathbb{C} \big| z^2 = 9\}$
b. $\{z \in \mathbb{C} \big| z\bar{z} + 9 = 0\}$
c. $\{z \in \mathbb{C} \big| z\bar{z} - 9 = 0\}$
d. $\{z \in \mathbb{C} \big| \operatorname{Im}(z) \leqslant 2\}$
e. $\{z \in \mathbb{C} \big| |z + i + 1| < 1\}$
f. $\{z \in \mathbb{C} \big| 2\operatorname{Im}(z) + \operatorname{Re}(z) = 1\}$
g. $\{z \in \mathbb{C} \big| -\frac{\pi}{6} \leqslant \arg(z-1) < \frac{\pi}{6}\}$

2.

a. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de :

$$(-1-i)^3, \qquad \operatorname{Log}(1-i),$$

b. Calculer le module et l'argument de :

$$1 + i\sqrt{3}, \qquad \exp\left(\frac{1}{2} e^{\frac{5\pi i}{4}}\right).$$

3. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe. Calculer

$$\frac{\partial \operatorname{Re} f(z)}{\partial z}, \qquad \frac{\partial \operatorname{Im} f(z)}{\partial \bar{z}},$$

en termes de $f(z)$, $f'(z)$.

4. Soit $\mathcal{C}$ le chemin paramétré par la fonction $z(t) = te^{it}$ avec $t \in [0,1]$. En utilisant la définition de l'intégrale complexe calculer

$$\int_{\mathcal{C}} \bar{z} dz.$$

5. On considère l'intégrale suivante :

$$A = \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z(z-1)} dz.$$

où $f(z)$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ qui ne s'annule pas en $z = 1$ et en $z = 0$. En utilisant les théorèmes de Cauchy répondez aux questions suivantes :

a. Quelle est la valeur de A si le chemin $\mathcal{C}$ est le cercle de centre 1 et de rayon $\frac{1}{2}$ parcouru dans le sens positif ?

b. Quelle est la valeur de A si le chemin $\mathcal{C}$ est le cercle de centre -1 et de rayon $\frac{1}{2}$ parcouru dans le sens positif ?

6. Trouver le domaine de convergence de la série entière suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{5^n}(z-5)^n.$$