Eléments de correction pour l'examen du 6 Mai 2022

6 mai 2022

exercice 1
On a :

$$(1-i)^3 = (\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^3 = 2\sqrt{2}e^{-3i\frac{\pi}{4}}$$

et

$$\exp(-e^{i\frac{5\pi}{4}}) = \exp(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}e^{i\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

exercice 2
On applique le critère de Jean Le Rond marquis de d'Alembert (1717-1783) à la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ où $\alpha_n = \frac{n^3}{3^n}(z-2)^n$. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\frac{(n+1)^3}{n^3}|z-2|\right) = \frac{1}{3}|z-2|$$

donc la série converge absolument si $\frac{1}{3}|z-2| < 1$ et diverge grossièrement si $\frac{1}{3}|z-2| > 1$.

Ainsi le domaine de convergence cherché est le disque ouvert de centre 2 et de rayon 3.

exercice 3
La fonction $z \mapsto \frac{e^{\frac{1}{z}}-1}{z-1}$ est définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$ privé de 0 et 1.

En $z=1$, la fonction $z \mapsto \exp(\frac{1}{z})$ étant analytique en 1, on a :

$$e^{\frac{1}{z}} - 1 = (e-1) + \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k (z-1)^k.$$

Comme de plus $e - 1 \neq 0$, 1 est un pôle simple de $z \mapsto \frac{e^{\frac{1}{z}}-1}{z-1}$.

En $z=0$, on a :

$$\frac{e^{\frac{1}{z}}-1}{z-1} = \frac{1}{z-1} \times \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!z^k}.$$

Or $z \mapsto \frac{1}{z-1}$ est analytique en 0, on a donc une singularité essentielle en 0.

exercice 4

a) La fonction g devant être holomorphe sur $\mathbb{C}$, elle vérifie les conditions de Cauchy-Riemann. On a tout d'abord

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial(2x^2-4x-2y^2)}{\partial y} = 4y$$

donc $v(x,y) = 4xy + L(y)$, L fonction de y. Puis, on écrit la seconde condition :

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial(2x^2-4x-2y^2)}{\partial x}$$

soit

$$4x + L'(y) = 4x - 4$$

d'où $L(y) = -4y + K$, K une constante. Ainsi on a $v(x,y) = 4xy - 4y + K$ et comme $g(0) = 0$, $v(x,y) = 4xy - 4y$.

b) Si $z = x + iy$, x et y réels, on a :

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2},\ y = \frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}
g(z) &= 2x^2 - 4x - 2y^2 + i(4xy - 4y)\\
&= 2\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 - 4\frac{z+\bar{z}}{2} - 2\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 + i(4\frac{z+\bar{z}}{2} \times \frac{z-\bar{z}}{2i} - 4\frac{z-\bar{z}}{2i})\\
&= \frac{1}{2}(z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2) - 2z - 2\bar{z} + \frac{1}{2}(z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2) + z^2 - \bar{z}^2 - 2z + 2\bar{z}\\
&= 2z^2 - 4z.
\end{aligned}$$

exercice 5

a) On développe $\frac{1}{z}$ en série entière au voisinage de 2 :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z} &= \frac{1}{2+(z-2)}\\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-2}{2}}\\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z-2}{2} + \frac{(z-2)^2}{4} - \frac{(z-2)^3}{8} + \frac{(z-2)^4}{16} - \cdot\right).
\end{aligned}$$

Ainsi au voisinage de 2 (en fait pour $0 < |z-2| < 2$), on a le développement de Laurent :

$$\frac{1}{z(z-2)^4} = \frac{1}{2(z-2)^4} - \frac{1}{4(z-2)^3} + \frac{1}{8(z-2)^2} - \frac{1}{16(z-2)} + \frac{1}{32} - \cdots$$

b) D'après la question précédente, le résidu en 2 de $z \mapsto \frac{1}{z(z-2)^4}$ est $\frac{-1}{16}$.

c) Les deux pôles 0 et 2 sont à l'intérieur du cercle considéré. On applique la formule des résidus. Or en 0, le résidu est $\frac{1}{16}$. La somme des résidus est nulle, l'intégrale vaut donc 0.

exercice 6

a) Il suffit d'écrire que $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$, x réel, et dire que l'intégrale d'une fonction de la variable réelle x à valeurs dans $\mathbb{C}$ est l'intégrale de la partie réelle plus i fois l'intégrale de la partie imaginaire.

b) On a :

$$z^2 + 2z + 2 = (z + 1 + i)(z + 1 - i).$$

Ainsi la fonction $z \mapsto \dfrac{e^{iz}}{z^2 + 2z + 2}$ admet deux singularités $-1 + i$ et $-1 - i$ qui sont deux pôles simples.

Dans le calcul de l'intégrale curviligne, le seul pôle à considérer est -1+i. Le résidu vaut $\exp(-1 - i)/2i$, donc l'intégrale curviligne vaut $\dfrac{\pi}{e}(\cos(1) - i\sin(1))$.

c) L'intégrale curviligne de la question précédente est égale à :

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2 + 2x + 2} dx + \int_{\mathcal{C}_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 2z + 2} dz.$$

Le demi-cercle $\mathcal{C}_R$ est paramétré par $\theta \mapsto Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. On remarque que

$$e^{iz} = e^{iRe^{i\theta}} = e^{-R\sin\theta} e^{iR\cos\theta}$$

est borné car $0 \leq \sin\theta \leq 1$. Ainsi comme

$$\int_{\mathcal{C}_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 2z + 2} dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{i\theta}}}{(Re^{i\theta})^2 + 2Re^{i\theta} + 2} iRe^{i\theta} d\theta$$

le module de l'intégrale curviligne va se comporter quand $R \to +\infty$ comme $\pi \dfrac{R}{R^2} = \dfrac{\pi}{R}$, donc tend vers 0.

En conclusion, l'intégrale généralisée I vaut $-\dfrac{\pi}{e}\sin(1)$.