Remarques et compléments aux séances de travaux dirigés du module L2 MaPC4A, année 2021-2022 (work in progress)

groupe Hervé Le Ferrand

8 avril 2022

Sur la première fiche de travaux dirigés

1. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de son repère canonique, on considère la droite d'équation
$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0 \tag{1}$$
α, β, γ des réels et $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$. En posant $z = x + iy$, donner une expression « complexe » de l'équation de la droite (indication : exprimer x et y en fonction de z et de $\overline{z}$).
2. Donner une équation « complexe » (faisant intervenir z et $\overline{z}$) du cercle de centre i et de rayon 2.
3. Soit λ et μ deux nombres complexes, vérifier que l'application $z \mapsto \lambda z$ est $\mathbb{C}$-linéaire. Montrer que l'application $z \mapsto \lambda z + \mu \overline{z}$ est $\mathbb{R}$-linéaire. Est-elle $\mathbb{C}$-linéaire ?
4. On calcule facilement $(2+3i)^2$. On trouve $-5+12i$. Et si on avait demandé de résoudre l'équation $z^2 = -5+12i$?

   On pose $z = x+iy$, on identifie les parties réelles et imaginaires de z^2 et de $-5+12i$, et on ajoute la condition $|z|^2 = |-5+12i|$ ...
5. Soit z un nombre complexe de module $r > 0$ et d'argument principal $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[$. Ceci signifie $z = x + iy$ ne se situe pas sur la demi-droite $\{(x,y) \ / \ x \leq 0, \ y = 0\}$. Etablir que :
$$\theta = 2 \arctan \frac{y}{x + \sqrt{x^2+y^2}}. \tag{2}$$
Indication : partir de $\tan \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} = \dfrac{\cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \cdots$
6. Dans l'exercice 11, pour calculer i^n, n entier naturel, on distingue les cas $n = 4p+k$, $k \in \{0,1,2,3\}$.

7. Dans l'exercice 19, $\log z = \ln|z| + i\arg z = \ln\sqrt{x^2+y^2} + i\arctan\frac{y}{x}$ pour z dans le le demi-plan ouvert $\Re z > 0$ $(z = x+iy)$. Cette fonction réalise une bijection de ce demi-plan sur la bande ouverte $-\frac{\pi}{2} < \Im z < \frac{\pi}{2}$.
Rappelons que si f est un fonction holomorphe dans un domaine de $\mathbb{C}$ (domaine= ouvert connexe par arcs), et si $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ alors :
$$f'(z) = f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \tag{3}$$
et ainsi
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\ ;\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{4}$$
Ce sont les conditions de Cauchy-Riemann. On a une réciproque si $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, si les fonctions $u(x,y)$ et $v(x,y)$ admettent des dérivées partielles continues (sur un domaine) et vérifient les conditions Cauchy-Riemann, alors la fonction $f(z)$ est holomorphe. On peut appliquer ce résultat à la fonction log sur le demi-plan $\Re z > 0$ pour montrer qu'elle est holomorphe et d'ailleurs on retrouve de plus :
$$\begin{aligned} \log'(z) &= \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} && (5) \\ &= \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{1}{z}. && (6) \end{aligned}$$

8. Un sous-ensemble non vide E de $\mathbb{C}$ est dit *connexe* s'il n'existe pas deux ouverts O_1 et O_2 de $\mathbb{C}$ tels que $E = (E\cap O_1)\cup(E\cap O_2)$ et $E\cap O_1\cap O_2 = \emptyset$.
On retiendra que dans $\mathbb{C}$, « ensemble ouvert connexe » équivaut à « ensemble ouvert connexe par arcs ». Un tel ensemble est appelé *domaine*. Parmi les ensembles connexes par arcs, on a les ensembles *étoilés* et les ensembles *convexes*. Dans la théorie des fonctions holomorphes des ouverts convexes et les ouverts étoilés sont des domaines à prendre en considération.

9. Soit $f(z) = f(x+iy)$ une fonction holomorphe dans un domaine de $\mathbb{C}$. On a vu que
$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}\ ;\ if'(z) = \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{7}$$
et ainsi
$$2f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{8}$$
Si $g(z) = g(x+iy)$, on pose de façon générale :
$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x} - i\frac{\partial g}{\partial y}\right). \tag{9}$$

Revenons à notre fonction holomorphe $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. On suppose qu'elle ne s'annule pas. En n'oubliant pas que $u(x,y)$ et $v(x,y)$ vérifient les conditions de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ ; \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{10}$$

calculons $\dfrac{\partial |f(z)|}{\partial z} = \dfrac{\partial(\sqrt{u^2+v^2})}{\partial z}$.

On a :

$$\frac{\partial |f(z)|}{\partial x} = \frac{1}{2}(u^2+v^2)^{-\frac{1}{2}}\left(2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{11}$$

et

$$\frac{\partial |f(z)|}{\partial y} = \frac{1}{2}(u^2+v^2)^{-\frac{1}{2}}\left(2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial v}{\partial y}\right). \tag{12}$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial |f(z)|}{\partial x} - i\frac{\partial |f(z)|}{\partial y} &= (u^2+v^2)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right) - i\left(u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] && (13)\\
&= (u^2+v^2)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right) - i\left(u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] && (14)\\
&= (u^2+v^2)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{\partial u}{\partial y}(-v-iu) + \frac{\partial v}{\partial y}(u-iv)\right] && (15)\\
&= (u^2+v^2)^{-\frac{1}{2}}(u-iv)\left[\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right] && (16)\\
&= \frac{\overline{f(z)}}{|f(z)|}f'(z) = |f(z)|\frac{f'(z)}{f(z)}. && (17)
\end{aligned}$$

10. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine D de $\mathbb{C}$ et $t \mapsto x(t) + iy(t)$ une fonction de la variable réelle t à valeurs dans D de classe C^1 (i.e. continûment dérivable). On pose $z(t) = x(t) + iy(t)$. Pourquoi peut-on bien écrire

$$\frac{d}{dt}f(z(t)) = f'(z(t))z'(t) \ ? \tag{18}$$

Comme $f(z(t)) = u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t))$, d'après la *règle de la chaine* (différentielle d'une fonction composée) on a :

$$\frac{d}{dt}u(x(t),y(t)) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = x'(t)\frac{\partial u}{\partial x} + y'(t)\frac{\partial u}{\partial y} \tag{19}$$

et

$$\frac{d}{dt}v(x(t),y(t)) = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = x'(t)\frac{\partial v}{\partial x} + y'(t)\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{20}$$

Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}f(z(t)) &= \left(x'(t)\frac{\partial u}{\partial x} + y'(t)\frac{\partial u}{\partial y}\right) + i\left(x'(t)\frac{\partial v}{\partial x} + y'(t)\frac{\partial v}{\partial y}\right) && (21)\\
&= x'(t)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) + y'(t)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) && (22)\\
&= x'(t)f'(z) + iy'(t)f'(z) = f'(z)z'(t). && (23)
\end{aligned}$$

11. Au sujet de la transformation de Joukovski, $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $z \neq 0$, faisons les remarques suivantes :

(a) Si $z \neq 0$, z et $\frac{1}{z}$ ont la même image par f. Ainsi on peut distinguer les deux domaines $|z| < 1$ (disque ouvert) et $|z| > 1$. Si z est de module 1, $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$, on a :

$$f(e^{i\theta}) = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \cos\theta. \tag{24}$$

L'image du cercle unité est dons le segment réel $[-1, 1]$.

(b) Pour l'injectivité de f, les domaines d'injectivité sont d'après la remarque ci-dessus sont soit contenus dans le domaine $|z| < 1$, soit dans le domaine $|z| > 1$. On raisonne ensuite en partant de $f(z_1) = f(z_2)$, z_1, z_2 dans un même domaine soit :

$$\begin{aligned}
z_1 + \frac{1}{z_1} &= z_2 + \frac{1}{z_2} && (25)\\
z_1 - z_2 &= \frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2} && (26)\\
(z_1 - z_2)(1 - \frac{1}{z_1 z_2}) &= 0. && (27)
\end{aligned}$$

Comme on ne peut avoir $z_1 z_2 = 1$, nécessairement $z_1 = z_2$.

(c) Pour la surjectivité, on regarde l'équation $f(z) = w$ avec w ne se trouvant pas sur le segment $[-1, 1]$ (on écarte les w de la forme $\cos\theta$). Cette équation s'écrit :

$$z^2 - 2wz + 1 = 0. \tag{28}$$

Elle admet deux solutions distinctes. Or le produit de ces deux solutions vaut 1 donc une solution se trouve dans le domaine $|z| < 1$ et l'autre dans le domaine $|z| > 1$.

(d) Une autre façon de voir tout cela de façon plus géométrique est de calculer $f(re^{i\theta})$ pour $r > 1$ et $0 \leq \theta < 2\pi$. Les calculs sont donnés dans le polycopié de Hairer-Wanner. On voit alors que les images des cercles de centre l'origine et de rayon $r > 1$ sont des ellipses de plus en plus « grandes » dans le sens que les valeurs des demi-grands axes et demi-petits axes sont croissantes en fonction de r. D'ailleurs quand r devient très grand, ces ellipses sont partiquement des cercles. En quelque sorte ces ellipses « recouvrent » le plan complexe privé du segment $[-1,1]$.

12. Concernant la fonction $z \mapsto z^2$, faisons les remarques suivantes :
    (a) Si $\Re z > 0$, $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ et donc $z^2 = r^2 e^{2i\theta}$ et on remarque que quand r parcourt $]0,+\infty[$, r^2 parcourt aussi $]0,+\infty[$, et que $-\pi < 2\theta < \pi$. Réciproquement si $w = \rho e^{i\phi}$ avec $\rho > 0$ et $-\pi < \phi < \pi$, il existe un unique z vérifiant à la fois $z^2 = w$ et $\Re z > 0$: c'est $z = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\phi}{2}}$.
    (b) Comment prouver que la fonction $w \mapsto z$ est holomorphe. On pourrait calculer z en fonction de $\Re w$ et de $\Im w$ et vérifier les conditions de Cauchy-Riemann. Les calculs sont compliqué. Il est préférable d'utiliser les conditions de Cauchy-Riemann avec les coordonnées polaires ρ et ϕ.
    Soit $g(z) = g(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$ une fonction holomorphe. Posons $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$, $\tilde{P}(\rho,\phi) = P(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)$ et $\tilde{Q}(\rho,\phi) = Q(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)$. Les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent aussi :
    $$\rho\frac{\partial\tilde{P}}{\partial\rho} = \frac{\partial\tilde{Q}}{\partial\phi};\ \rho\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial\rho} = -\frac{\partial\tilde{P}}{\partial\phi}. \tag{29}$$
    Dans notre situation, $\tilde{P}(\rho,\phi) = \sqrt{\rho}\cos\frac{\phi}{2}$ et $\tilde{Q}(\rho,\phi) = \sqrt{\rho}\sin\frac{\phi}{2}$
13. Dans l'exercice 18, on aura reconnu au final la fonction $z \mapsto z^4 + iL$ où L est une constante réelle.

Sur la seconde fiche de travaux dirigés

1. Soit z un nombre complexe de module strictement inférieur à 1, alors $\lim_{n\to+\infty} z^n = 0$. On peut montrer ce résultat de différentes façons partant de $z = re^{i\theta}$ $0 \leq r < 1$ et $\theta \in [0, 2\pi[$:

   (a) On a
   $$|z|^n = |z|^n = r^n = \exp(n\ln(r)) \tag{30}$$
   et comme $\ln(r) < 0$, on conclut.

   (b) On a
   $$z^n = r^n\cos(n\theta) + ir^n\sin(n\theta) \tag{31}$$
   et les deux suites « partie réelle » et « partie imaginaire » tendent vers 0.

   Si $|z| < 1$, la suite $(i + z^n)_n$ tend vers i. Pour montrer cela, on écrit :
   $$|(i + z^n) - i| = |z^n|. \tag{32}$$

2. Si $z \neq 1$, on doit savoir que :
   $$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}. \tag{33}$$
   On réécrit cette égalité et on prend les modules :
   $$\left|\frac{1}{1-z} - \sum_{k=0}^{n} z^k\right| = \left|\frac{z^{n+1}}{1-z}\right| = \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|}. \tag{34}$$
   Si $|z| < 1$, on en déduit :
   $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1}{1-z}. \tag{35}$$
   Fixons $0 < \rho < 1$ et faisons deux remarques :

   (a) si z est dans le disque fermé de centre l'origine et de rayon ρ alors on a :
   $$\left|\frac{1}{1-z} - \sum_{k=0}^{n} z^k\right| \leq \frac{\rho^{n+1}}{1-\rho} \tag{36}$$
   en utilisant $1 = |(1-z) + z| \leq |1-z| + |z|, 1 - |z| \leq |1-z|$.
   Ainsi la convergence des *sommes partielles* $\sum_{k=0}^{n} z^k$ vers $\frac{1}{1-z}$ ne dépend pas, en quelque sorte, de z pris dans le disque fermé de centre l'origine et de rayon ρ. On parlera de *convergence uniforme* sur le disque fermé de centre l'origine et de rayon ρ.
   En fait pour les séries de fonctions donc pour les *séries entières* , la notion que vous avez à retenir est celle de *convergence normale* :

pour une série du type $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(z)$, z dans un domaine D de $\mathbb{C}$, on suppose qu'il existe une série numérique réelle à termes positifs $(\alpha_n)_n$ telle que $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k$ converge et pour tout $z \in D$ et tout n, $|u_n(z)| \leq \alpha_n$.

Dans le cas d'une série entière de rayon de convergence non nul, on a convergence normale de la série entière sur tout compact contenu dans le disque de convergence. Cela permet de prouver que la fonction définie par la série entière dans le disque de convergence est continue et holomorphe dans ce dique. Plus généralement une fonction analytique dans un ouvert de $\mathbb{C}$ est holomorphe. On a la réciproque, c'est la théorie intégrale de Cauchy.

(b) La fonction $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ est une *fraction rationnelle* donc holomorphe sur son domaine de définition, donc analytique. La fonction a un *pôle* simple à savoir 1. La fonction est analytique en 0, le développement est donné par $\sum_{k=0}^{+\infty} z^k$. On constate que son rayon de convergence (=1) est la distance de 0 au pôle 1.

Plaçons nous en $z = \frac{1}{2}$ et posons $z = \frac{1}{2} + u$:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{\frac{1}{2} - u} = \frac{2}{1-2u}. \tag{37}$$

Ainsi si $|z - \frac{1}{2}| = |u| < \frac{1}{2}$ on a :

$$\frac{1}{1-z} = 2\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k u^k = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{k+1}(z - \frac{1}{2})^k. \tag{38}$$

Il est immédiat que le rayon de convergence de cette série entière vaut $\frac{1}{2}$ (on retrouve ce résultat en appliquant la règle de d'Alembert, c'est-à-dire en regardant la limite du quotient $\frac{2^{k+2}}{2^{k+1}}$). La distance du point $\frac{1}{2}$ au pôle 1 est justement $\frac{1}{2}$.

3. On a à calculer l'intégrale curviligne de $z \mapsto z^2$ sur le lacet $C : \theta \mapsto e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi[$ (cercle unité parcouru une fois dans le sens positif) :

$$\int_C f(z)dz = \int_0^{2\pi} (e^{i\theta})^2 ie^{i\theta} d\theta = i\int_0^{2\pi} e^{i3\theta} d\theta = i\left[\frac{e^{i3\theta}}{3i}\right]_0^{2\pi} = 0. \tag{39}$$

On pouvait s'attendre à ce résultat car $z \mapsto z^2$ est primitivable sur $\mathbb{C}$. Une fonction holomorphe sur un domaine D du plan complexe possédant une « bonne géométrie », par exemple étoilée, est primitivable sur D.

4. Soit la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^k}{k+1}$, pouvez-vous donner son rayon de convergence sans faire de calculs ? (indication : regarder les cas $z = 1$ et $z = -1$).

5. L'intégrale curviligne de $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ sur le lacet $C : \theta \mapsto 2 + e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi[$ vaut 0 (on peut justifier celà en disant que la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ est holomorphe dans le demi-plan convexe $\Re z > 0$ et que, le lacet et son intérieur sont contenus dans ce demi-plan.

On peut dire aussi que $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ est primivable sur ce demi-plan). Ayons la curiosité d'écrire l'intégrale curviligne :

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}}{2+e^{i\theta}} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{-2\sin\theta}{5+4\cos\theta} d\theta + i\int_0^{2\pi} \frac{2\cos\theta+1}{5+4\cos\theta} d\theta. \tag{40}$$

Comment calculeriez-vous les deux intégrales, partie réelle et partie imaginaire ci-dessus ?

6. Soit a un point du plan complexe et plaçons sur l'ouvert connexe par arcs $\mathbb{C} - \{a\}$. On peut tracer des lacets autour du point a. Pour éviter cette situation, on peut effectuer une **coupure** : on ôte au plan $\mathbb{C}$ une demi-droite issue de a.
7. On a remarqué que l'intégrale curviligne de $z \mapsto z^2$ sur le cercle $C_r : \theta \mapsto re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi[$ ne dépend pas de r et vaut $2i\pi$. Pouvait-on s'attendre à cela sans faire de calculs ? La réponse est affirmative. Il suffit de se placer dans les conditions du théorème de Cauchy (intrégale curviligne nulle pour une fonction holomorphe sur un lacet avec les bonnes hypothèses sur la frontière et l'intérieur du lacet !). L'idée est de considérer une coupure ou un **trou de serrure** de telle manière à joindre les deux cercles. Ce sont les dessins que nous avons réalisés en travaux dirigés. Vous avez d'ailleurs utilisé cette idée à plusieurs reprises dans le cours (pour la démonstration de la formule intégrale de Cauchy ou encore pour la formule des résidus).
8. Soit une série entière $\sum_n \alpha_n z^n$. On suppose que la suite $(\alpha_n 2^n)$ est bornée. Qu'implique cette hypothèse ? On peut voir que :

$$|\alpha_n z^n| = |\alpha_n 2^n| \left|\frac{z}{2}\right|^n \dots \tag{41}$$

9. On rappelle que pour $z \in \mathbb{C}$:

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{42}$$

Résoudre l'équation $\sin z = 0$ ($e^{iz} = e^{-iz}$, donc $e^{2iz} = 1$. On pose $z = x + iy$, x et y réels ...).

10. Calculs d'intégrales généralisées
    (a) Quelle est la valeur de l'intégrale généralisée (réelle) suivante ?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \tag{43}$$

Rappelons que ce type d'intégrale a un sens si les deux intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ convergent.

(b) On considère maintenant dans le domaine complexe la fonction $f : z \mapsto \dfrac{1}{z^2+1}$. Soit R un réel strictement supérieur à 1. Quelle est la valeur de l'intégrale curviligne de f le long du lacet (simple) formé en parcourant le segment $[-R, R]$ puis le demi-cercle $\theta \mapsto Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi[$? (appliquez la formule intégrale de Cauchy à la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{z+i}$ sur ...)

(c) On rappelle que pour a et b complexes :

$$|a| - |b| \leq ||a| - |b|| \leq |a+b|. \tag{44}$$

On rappelle aussi que le module d'une intégrale (en faisant attention aux bornes de l'intégrale) est plus petit que l'intégrale du module. Majorer alors l'intégrale curviligne de f le long du demi-cercle $\theta \mapsto Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi[$.

$$\left| \int_0^\pi \frac{iRe^{i\theta} d\theta}{R^2 e^{i2\theta} + 1} \right| \leq \int_0^\pi \frac{R d\theta}{|R^2 e^{i2\theta} + 1|} \tag{45}$$

Or $|R^2 e^{i2\theta} + 1| \geq R^2 - 1$, donc ...
Que se passe-t-il quand $R \to +\infty$? Conclure !

(d) Par une même méthode pourriez-vous déterminer la valeur de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} \text{ ?} \tag{46}$$

11. Calculez les développements en séries entières en 0 des fonctions suivantes : $z \mapsto e^z + \dfrac{1}{1-z}$; $z \mapsto e^z(1-z)$; $z \mapsto \dfrac{e^z}{1-z}$ (produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes) ; $z \mapsto \dfrac{1}{(1-z)(2-z)}$ (décomposition en éléments simples, produit de Cauchy,...)

Sur la troisième fiche de travaux dirigés

1. On a calculé l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ en utilisant l'intégrale curviligne (dans le domaine complexe) de la fonction $f : z \mapsto \frac{1}{z^2+1}$. Pour pouvoir conclure, nous avons dû faire un passage à la limite. Pourr ait-on procéder de façon similaire pour calculer
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx \text{ ?} \tag{47}$$
On aurait envie de considèrer dans le domaine complexe la fonction $z \mapsto \frac{\cos z}{z^2+1}$. Le problème est que la fonction cos n'est pas bornée sur le demi-plan $\Im z \geq 0$! On considère alors la $z \mapsto \frac{e^{iz}}{z^2+1}$ car $z \mapsto e^{iz}$ est bornée sur sur le demi-plan $\Im z \geq 0$ et que :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx = \Re\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx\right). \tag{48}$$

2. Au sujet de la trigonométrie avec les nombres complexes, faisons quelques rappels. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a :
$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \tag{49}$$
$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}. \tag{50}$$
Les formules d'additions sont toujours valables. Pour les retrouver, on peut partir de :
$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z \tag{51}$$
et
$$e^{i(w+z)} = e^{iw} e^{iz}. \tag{52}$$
Une nouvelles fois, on n'oubliera pas que cos et sin ne sont pas bornées sur $\mathbb{C}$.

3. Sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$ est continue et dérivable. Le problème se situe en 0 mais on a un développement limité à l'ordre 1 en 0 :
$$f(x) = 0 + 0.x + x(x \sin \frac{1}{x}), \quad \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0. \tag{53}$$
donc $f(0) = f'(0) = 0$. La fonction s'annule pour les réels de la forme $\frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}^\star$. Ainsi quelque soit l'intervalle centré en 0, aussi petit soit-il, il y a toujours des zéros de f dans l'intervalle considéré. Peut-on avoir la même situation dans $\mathbb{C}$? La réponse est non !

Considérons une fonction g holomorphe non identiquement nulle dans un voisinage de 0 (un disque ouvert par exemple) et que $g(0) = 0$. On sait que g admet un développement du type :

$$g(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \tag{54}$$

Soit $k \geq 1$ le plus petit entier tel que $a_k \neq 0$, on a donc :

$$g(z) = a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \cdots = z^k (a_k + a_{k+1} z + \cdots) \tag{55}$$

Comme la fonction entre parenthèses est continue et ne s'annule pas en 0, elle ne s'annule pas dans un voisinage de 0. Ainsi g n'a pas d'autres zéros (que 0) dans un voisinage de 0. C'est le *principe des zéros isolés.*

4. Soit f une fonction entière (holomorphe sur tout $\mathbb{C}$) nulle au voisinage de 0. Que peut-on dire de f ?

5. La fraction rationnelle $f : z \mapsto \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ est holomorphe dans les trois couronne $V_1 = \{0 < |z| < 1\}$, $V_2 = \{1 < |z| < 2\}$ et $V_3 = \{2 < |z| < \infty\}$. Elle est donc développable en série de Laurent dans chacune des trois couronnes. On commence par écrire :

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}. \tag{56}$$

Sur V_1, on a en fait un développement en série entière :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n. \tag{57}$$

Sur V_2, on écrit :

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^n} \tag{58}$$

d'où

$$f(z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}. \tag{59}$$

Sur V_3, on a :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1\right) z^n. \tag{60}$$

6. Si z_0 est un point singulier isolé d'une fonction f, c'est-à-dire que f est holomorphe sur une couronne du type $0 < |z - z_0| < \rho$, le résidu de f en z_0 est le coefficient de $(z - z_0)^{-1}$ dans le développement en série de Laurent au voisinage de z_0. La fraction rationnelle $f : z \mapsto \dfrac{1}{z^2+1}$ admet deux points singuliers i et $-i$ qui sont des pôles

simples. Il y a plusieurs façons de calculer le résidu en i de f. Posons $z = i + t$, t tend vers 0 :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2+1} &= \frac{1}{t(2i+t)} = \frac{1}{2it(1+\frac{t}{2i})} && (61)\\
&= \frac{1}{2i}(1 - \frac{t}{2i} + \left(\frac{t}{2i}\right) - \cdots) && (62)
\end{aligned}$$

Le résidu vaut donc $\frac{1}{2i}$.

Calculons le résidu en i de la fonction $z \mapsto \frac{1}{(z^2+1)^3}$:

$$\frac{1}{(z^2+1)^3} = \frac{1}{t^3(2i+t)^3} = -\frac{1}{8it^3}(1 + \frac{t}{2i})^{-3}. \tag{63}$$

Or au voisinage de 0, on a en dérivant plusieurs fois :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+u} &= 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - \cdots && (64)\\
-\frac{1}{(1+u)^2} &= -1 + 2u - 3u^2 + 4u^3 - \cdots && (65)\\
\frac{2}{(1+u)^3} &= 2 - 6u + 12u^2 - \cdots && (66)
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{(z^2+1)^3} = -\frac{1}{8it^3}(1 - \frac{3t}{2i} + 6\frac{t^2}{-4} \cdots) \tag{67}$$

Le résidu cherché est donc $\frac{3}{16i}$.

On obtient de plus (voir les exemples déjà traités) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = 2i\pi \times \text{résidu en } i = \frac{3\pi}{8}. \tag{68}$$

7. Soit à trouver la valeur de l'intégrale curviligne (le cercle est parcouru une seule fois dans le sens trigonométrique) :

$$\int_{|z|=2} \frac{\cos z}{(z-i)^2} dz. \tag{69}$$

On peut évaluer cette intégrale par deux méthodes :

(a) Par la formule intégrale de Cauchy dans le cas d'une dérivée :

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)} dz \tag{70}$$

avec ici $f(z) = \cos z$, $z_0 = i$ et γ notre cercle.

(b) Par la formule des résidus appliquée à la fonction $z \mapsto \dfrac{\cos z}{(z-i)^2}$ et à la singularité i (qui se trouve à l'intérieur du cercle). Cette singularité est un pôle double. En effet $\cos z$ est analytique en i donc :

$$\frac{\cos z}{(z-i)^2} = \frac{\cos(i) - \sin(i)(z-i) - \frac{\cos(i)}{2}(z-i)^2 + \cdots}{(z-i)^2} \tag{71}$$

$$= \frac{\cos(i)}{(z-i)^2} - \frac{\sin(i)}{z-i} + \text{une série de Taylor} \tag{72}$$

On s'assure que $\cos(i) \neq 0$. L'intégrale cherchée est égale à $2i\pi$ mutiplié par le résidu de $z \mapsto \dfrac{\cos z}{(z-i)^2}$ en i qui vaut $-\sin(i)$.

Au passage, comment trouve-t-on tous les zéros complexes de cos ? On a $\cos z = 0$ si et seulement si $e^{iz} + e^{-iz} = 0$, soit $e^{iz} = -e^{-iz}$ ou encore $e^{2iz} = -1$. Posons $z = x + iy$, x et y réels. On a $e^{2iz} = e^{-2y+2ix} = e^{-2y}e^{2ix}$. On arrive ainsi à l'équation :

$$e^{-2y}e^{2ix} = e^{i\pi}. \tag{73}$$

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont le même module et le même argument modulo 2π, soit $e^{-2y} = 1$ et $2x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et donc $y = 0$ (z est réel) et $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

8. Considérons l'intégrale généralisée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx. \tag{74}$$

La fonction sous le signe intégral est une fraction rationnelle du type $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ vérifiant la condition favorable $\deg P(x) \leq \deg Q(x) - 2$.

Dans le domaine complexe, la fonction $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ présente quatre singularités : i, $-i$, $3i$ et $-3i$. Ce sont des pôles simples. En effet, par exemple pour i, on a :

$$\frac{z^2 - z + 2}{z^4 + 10z^2 + 9} = \frac{1}{z-i} \times \frac{z^2 - z + 2}{(z+i)(z-3i)(z+3i)}. \tag{75}$$

Or la fonction $z \mapsto \dfrac{z^2 - z + 2}{(z+i)(z-3i)(z+3i)}$ est analytique au voisinage de i, donc est de la forme $\alpha_0 + \alpha_1(z-i) + \alpha_2(z-i)^2 + \cdots$, d'où :

$$\frac{z^2 - z + 2}{z^4 + 10z^2 + 9} = \frac{\alpha_0}{z-i} + \alpha_1 + \alpha_2(z-i) + \cdots \tag{76}$$

On s'assure que $\alpha_0 = \dfrac{i^2 - i + 2}{(i+i)(i-3i)(i+3i)} \neq 0$. Le résidu de $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ en i est α_0. Faisons une remarque importante, uniquement valable pour un pôle simple. On a :

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z)}{(z-i)Q_1(z)}. \tag{77}$$

Le résidu en i vaut $\frac{P(i)}{Q_1(i)}$. Or on a :

$$Q_1(z) = \frac{Q(z)}{z-i} = \frac{Q(z)-Q(i)}{z-i} \tag{78}$$

donc en faisant tendre z vers i, on obtient $Q_1(i) = Q'(i)$. Pour le pôle simple i, le résidu vaut $\frac{P(i)}{Q'(i)}$.

9. On a calculer des intégrales généralisées du type $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Qu'en est-il des intégrales du type $\int_0^{+\infty} f(x)dx$? Pour l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$, il n'y a pas de problème car la fonction sous le signe intégral est paire dont l'intégrale vaut la moitié de l'intégrale de $-\infty$ à $+\infty$. Ce n'est pas du tout le cas pour $\int_0^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx$. Il faudrait utiliser dans $\mathbb{C}$ un autre contour que le segment $[-0, R]$, suivi du quart de cercle puis du segment vertical $[iR, 0]$.
10. Evaluons les intégrales :

$$\int_{|z|=1} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz \ ; \ \int_{|z-2|=1} \frac{1}{z(z-2)^4}dz. \tag{79}$$

Pour la première, il y a une singularité à l'intérieur du lacet, à savoir 0. On a le développement en série de Laurent :

$$z^2(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \cdots) = \cdots + \frac{1}{5!z^3} + \frac{-\frac{1}{6}}{z} \tag{80}$$

Le résidu de la fonction $z \mapsto z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ en 0 vaut $-\frac{1}{6}$ et donc l'intégrale vaut $-\frac{i\pi}{3}$. Pour la seconde, la seule singularité à considérer est 2 qui est un pôle d'ordre 4. On développe $\frac{1}{z}$ en série entière au voisinage de 2 :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2+(z-2)} \tag{81}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-2}{2}} \tag{82}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z-2}{2} + \frac{(z-2)^2}{4} - \frac{(z-2)^3}{8} + \frac{(z-2)^4}{16} - \cdot\right). \tag{83}$$

Ainsi au voisinage de 2 (en fait pour $0 < |z-2| < 2$), on a le développement de Laurent :

$$\frac{1}{z(z-2)^4} = \frac{1}{2(z-2)^4} - \frac{1}{4(z-2)^3} + \frac{1}{8(z-2)^2} - \frac{1}{16(z-2)} + \frac{1}{32} - \cdots \tag{84}$$

Le résidu en 2 de $z \mapsto \dfrac{1}{z(z-2)^4}$ est $\frac{-1}{16}$ donc l'intégrale vaut $\dfrac{-i\pi}{8}$. On pouvait aussi calculer cette intégrale en utilisant la formule intégrale de Cauchy pour la dérivée d'ordre 3 de $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ en 2.