

1. Par définition d'intégrale on a :

$$\int_{\gamma} (z - c)^n dz = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt.$$

On peut facilement calculer cette intégrale réelle en trouvant une primitive, qui sera périodique de période 2π , sauf si $n = -1$.

2. La fonction e^z est holomorphe sur \mathbb{C} , donc on peut en trouver une primitive holomorphe, bien évidemment e^z . Puisque les deux chemins ont les mêmes extrêmes, les intégrales ont la même valeur :

$$\int_{\gamma_1} e^z dz = \int_{\gamma_2} e^z dz = [e^z]_0^{1+i} = e^{1+i} - 1.$$

L'intégrale sur le lacet $\gamma_1 - \gamma_2$ est donc zéro. On peut aussi trouver le même résultat en utilisant la définition de l'intégrale.

Au contraire, la fonction $|z|^2$ n'est pas holomorphe, il faut donc appliquer directement la définition de l'intégrale :

$$\int_{\gamma_1} |z|^2 dz = \int_0^1 [(t^2 + t^4) + 2i(t^3 + t^5)] dt = \frac{8}{15} + i\frac{5}{6}.$$

De la même façon on trouve que l'intégrale le long du chemin γ_2 est égale à $\frac{5}{6} + i\frac{8}{15}$. L'intégrale sur le lacet $\gamma_1 - \gamma_2$ n'est pas donc zéro.

4. La fonction intégrande est entière et on peut aisément en trouver une primitive.

6. Une primitive de $f(z)$ est évidemment donnée par $-z^{-1}$, même si son domaine de définition \mathbb{C}^* n'est pas simplement connexe. Puisque on a une primitive l'intégrale est zéro :

$$\int_{S^1} z^{-2} dz = -[z^{-1}]_1^1 = 0.$$

La réponse à la deuxième question est affirmative, puisque l'argument utilisé pour montrer l'existence d'une primitive holomorphe sur un domaine simplement connexe reste valide, car l'intégrale entre z_0 et z ne dépend pas du chemin choisi.

7. Remarquer qu'on peut simplifier la fonction intégrande $f(z)$:

$$f(z) = \frac{z + i}{(z + 1)(z - 1)}.$$

Elle est donc holomorphe sur son domaine de définition $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$. L'intérieur du chemin γ n'est pas contenu dans le domaine de définition de $f(z)$. On considère le chemin $\tilde{\gamma}$ donné par γ et par deux petits cercles C_j autour des points ± 1 liées à γ par des segments parcourus dans les deux directions. L'intérieur de $\tilde{\gamma}$ est contenu dans le domaine de $f(z)$, donc par le premier théorème de Cauchy on a que

$$0 = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{j=\pm 1} \int_{C_j} f(z) dz$$

où la contribution des intégrales le long des segments est zéro. Pour le deuxième théorème de Cauchy on a par exemple

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_1} \frac{g(z)}{z-1} dz = 2\pi i g(1) = \frac{2\pi i}{1-i},$$

puisque $g(z)$ est holomorphe à l'intérieur de C_1 . On trouve donc

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i.$$

De la même façon, dans le cas du deuxième chemin on trouve que l'intégrale vaut -2π . Puisque l'intégrale a deux valeurs différentes sur les deux chemins, il n'est pas possible de déformer le premier dans l'autre sans sortir du domaine d'holomorphicité de $f(z)$.

8. Les deux intégrales valent 0 et πi .

9. Les deux intégrales valent $2\pi i$ et 0.

10. a. $\pi(e-1/e)$, b. 0, c. $\pi i(e-1/e)$, d. 0, e. $-i\frac{\pi}{4}$, f. $-i\frac{\pi}{2}(e+1/e)$.

12.

$$\frac{-2\pi i}{(b-a)^n}$$

13. a. $2\pi i$, b. $\pi i(2-e)$, c. $-\pi i e$.

14. a. $R=1$, b. $R=1$, c. $R=+\infty$, d. $R=1/e$, e. $R=\frac{1}{k^k}$.

17. $R=4$, puisque la singularité 1 est apparente.

18. Pour $z \sim 0$ on a

$$f(z) = 1 + z + \frac{3}{2}z^2 + \dots$$

et $R=1$ puisque $z=1$ est une singularité (essentielle).