

Intégrale le long d'un chemin

1. Soit γ le chemin donné par $z(t) = c + re^{it}$ pour $t \in [0, 2\pi]$ avec $r > 0$ et $c \in \mathbb{C}$. En utilisant directement la définition d'intégrale, montrer que

$$\int_{\gamma} (z - c)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1, \\ 2\pi i & \text{si } n = -1. \end{cases}$$

2. Intégrer la fonction e^z sur le chemin γ_1 donné par $z(t) = t + it^2$ pour $t \in [0, 1]$; sur le chemin γ_2 donné par $z(t) = t^2 + it$ pour $t \in [0, 1]$; et sur le chemin $\gamma_1 - \gamma_2$. Faire le même calcul pour la fonction $|z|^2$.

3. En utilisant directement la définition d'intégrale, calculer

$$\int_{C_r(0)} \bar{z} dz$$

où $C_r(0)$ est le cercle de rayon $r > 0$ centré à l'origine. Conclure que la fonction \bar{z} n'admet pas une primitive. Remarquer que le résultat dépend de r et en fait il est égal à $2i$ fois l'aire de $D_r(0)$.

Primitives

4. Si γ est l'arc de courbe de l'équation $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ joignant les points $(1, 1)$ et $(2, 3)$, trouver la valeur de

$$\int_{\gamma} (12z^2 + 4iz) dz.$$

5. Montrer que la fonction holomorphe $f(z) = \frac{1}{z+1}$ définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ n'admet pas de primitive holomorphe sur son domaine de définition. Calculer la primitive de $f(z)$ sur $D_0(1)$ qui vaut 0 en $z = 0$ et l'exprimer en fonction de la détermination principale du logarithme.

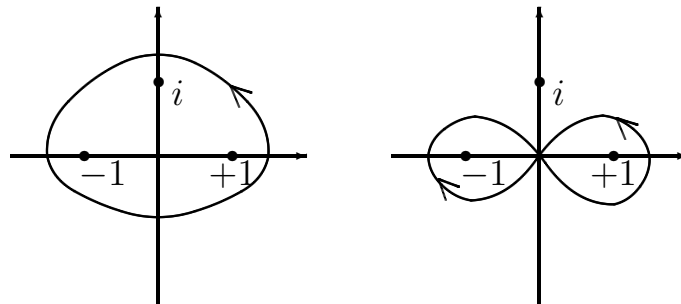
6. Montrer que la fonction $f(z) = z^{-2}$ admet une primitive holomorphe sur son domaine de définition, même s'il n'est pas simplement connexe. Conclure que l'intégrale de $f(z)$ sur le cercle S^1 est zéro. Si on a une fonction holomorphe sur \mathbb{C}^* telle que son intégrale sur S^1 est zéro, peut-on toujours en trouver une primitive holomorphe?

Formule intégrale de Cauchy

7. Calculer l'intégrale

$$\int_{\gamma} \frac{z^2 + 1}{(z^2 - 1)(z - i)} dz$$

en utilisant la formule de Cauchy pour les deux chemins γ suivants :



Est-il possible de déformer le premier chemin en l'autre sans sortir du domaine d'holomorphic de la fonction intégrande ?

8. Calculer l'intégrale

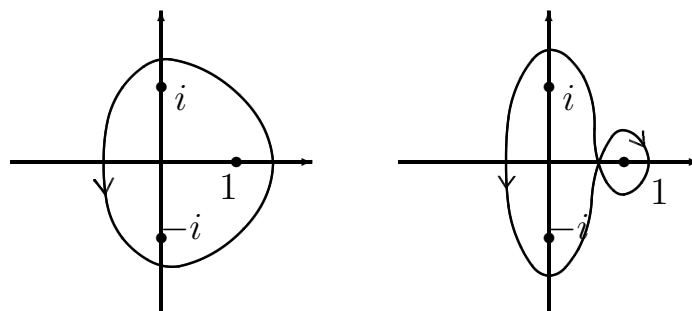
$$\int_{\gamma} \frac{z}{(z^2 - 1)(z - i)} dz$$

en utilisant la formule de Cauchy pour les deux chemins γ donnés dans l'exercice précédent.

9. Calculer l'intégrale

$$\int_{\gamma} \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z - 1)} dz$$

en utilisant la formule de Cauchy pour les deux chemins γ suivants :



Théorème de Taylor

17. On considère la série entière centrée en 0 associée à la fonction $\frac{z^3-1}{z^2+3z-4}$. Quel est le rayon de convergence et pourquoi ?

18. Calculer les premiers trois termes de la série de Taylor à l'origine de la fonction

$$f(z) = e^{\frac{z}{1-z}},$$

et donner son rayon de convergence.

Fonctions entières

19. Soit $f(z)$ une fonction entière telle que $|f(z)| \geq 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Si $f(0) = 1$ qu'est-ce qu'on peut dire de la fonction f ?

20. Soit $f(z)$ une fonction entière telle que $f(x + 2\pi) = f(x)$ pour tout x réel. Montrer que $f(z + 2\pi) = f(z)$ pour tout z dans \mathbb{C} .

21. Soit $f(z)$ une fonction entière telle que $\lim_{z \rightarrow +\infty} |f(z)| = +\infty$. Montrer que $f(z)$ est un polynôme.

Principe de prolongement analytique

22. Soit D un domaine symétrique par rapport à l'axe réel. Soit f une fonction holomorphe sur D telle que $f(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in D \cap \mathbb{R}$. Montrer que $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ pour tout $z \in D$.

23. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe sur un voisinage U de l'origine. Montrer que si $f(z) = f(2z)$ pour tous $z, 2z \in U$, alors $f(z)$ est une fonction constante.