

Points singuliers isolés

1. Trouver les points singuliers et leur type pour les fonctions suivantes :

- | | |
|---|---|
| a. $\frac{z}{\sin(z)}$, | d. $\frac{1}{z^2-1} \cos\left(\frac{\pi z}{z+1}\right)$, |
| b. $\frac{1-\cos(z)}{(\sin(z))^2}$, | e. $z(e^{1/z} - 1)$, |
| c. $z^2 \sin\left(\frac{z}{z+1}\right)$, | f. $e^{\tan\left(\frac{\pi}{z}\right)}$, |
| | g. $\sin(e^{1/z})$. |

Séries de Laurent

2. Trouver la série de Laurent de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

valide dans la couronne $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.

3. Trouver la série de Laurent centrée en $z = 0$ de la fonction

$$f(z) = \frac{z - \sin z}{z^3}.$$

Classifier la singularité en $z = 0$ et décrire le domaine de convergence de la série.

4. Trouver la série de Laurent centrée en $z = -2$ de la fonction

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}.$$

Classifier la singularité en $z = -2$ et décrire le domaine de convergence de la série.

Théorème des résidus

5. Soit $C_r(z_0)$ le cercle de rayon r centré en z_0 . Calculer les intégrales suivantes :

- | | |
|--|--|
| a. $\int_{C_2(0)} \frac{1}{z(z-1)^3} dz$, | c. $\int_{C_2(\frac{\pi}{2})} \frac{1}{\sin(z)(z-\frac{\pi}{2})^3} dz$, |
| b. $\int_{C_2(0)} \frac{1}{\sin(z)(z-\frac{\pi}{2})^3} dz$, | d. $\int_{\gamma} \frac{(\sin(z))^2}{z^3-1} dz$ |

où le chemin γ est donné par la concaténation des segments $[-3, 0]$, $[0, 3i]$ et $C_3(0) \cap \{z \mid \operatorname{Im}(z) > 0, \operatorname{Re}(z) < 0\}$.

Calcul d'intégrales réelles

6. Calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)} dx,$

b. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} dx,$

c. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx,$

d. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3} dx,$

e. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(a+bx^2)^n} dx,$

avec $a, b > 0, n \in \mathbb{N}$.

7. Calculer, en utilisant le lemme de Jordan, les intégrales suivantes :

a. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)e^{ix}}{x^2-2x+2} dx,$

b. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+4ix-5)^3} dx,$

c. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2-2ix-2)^2} dx,$

d. $\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{zt}}{(z^2-1)^2} dz,$ pour $t > 0$ et $t < 0,$

e. $\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\cosh(zt)}{(z+1)(z+2)} dz, t > 0,$

f. $\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{z \sin(zt)}{z^2+1} dz, t > 0.$

8. Calculer, pour $a > 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx$$

9. Pour a réel, calculer

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$$

10. Montrer que

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^4} dx = -\frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}.$$

11. Calculer

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx.$$

12. Calculer

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(5x)}{x^2+1} dx.$$