INTRODUCTION À L'ANALYSE COMPLEXE

NOTES DU MODULE MaPC4A - 2022

PAR G. CARLET

Fonctions holomorphes

Soient : $U \subset \mathbb{C}$ ouvert
$z' \in U$
$f : U \to \mathbb{C}$

déf. On dit que f est dérivable en z' si

$$\lim_{z \to z'} \frac{f(z) - f(z')}{z - z'} \quad \text{existe.}$$

On pose alors : $$f'(z') = \frac{df}{dz}(z') := \lim_{z \to z'} \frac{f(z) - f(z')}{z - z'}$$

On dit que f est holomorphe dans U si elle est dérivable en chaque point de U.

On dit que f est holomorphe en z' si elle est holomorphe dans un voisinage de z'.

c-à-d dans $D(z', \varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$.

Rmq. On a les règles usuelles du calcul différentiel :

(1) Une fonction dérivable en $z \in \mathbb{C}$ est continue en z.

(2) f, g dérivables en $z_0 \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ $f+g$ et fg sont dérivables en $z_0 \in \mathbb{C}$

et $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$

$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$ (Leibnitz)

si $g(z_0) \neq 0$, alors f/g est dérivable en z_0

et $$(f/g)'(z_0) = \left.\frac{f'g - fg'}{g^2}\right|_{z=z_0}.$$

(3) f dérivable en $z_0 \in \mathbb{C}$, g dérivable en $f(z_0)$

$\Rightarrow$ $g \circ f$ dérivable en z_0

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))\, f'(z_0)$$

Exemples

(1) $f(z) = c \in \mathbb{C}$ $\qquad f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto c$ $\qquad$ fonction constante

$$\lim_{z \to z'} \frac{f(z) - f(z')}{z - z'} = \lim \frac{c - c}{z - z'} = 0 \Rightarrow f'(z') = 0$$

ou $\dfrac{df}{dz}(z') = 0$

$\forall z' \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ une fonction constante est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et elle a dérivée nulle.

(2) $f(z) = z$ $\qquad f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto z$

$$\lim_{z \to z'} \frac{f(z) - f(z')}{z - z'} = \lim \frac{z - z'}{z - z'} = 1 \Rightarrow f'(z') = 1 \quad \forall z' \in \mathbb{C}$$

$\Rightarrow$ une fonction identique $f(z) = z$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et $f'(z) = 1$. $\left(\dfrac{dz}{dz} = 1 \right)$

Par la proposition précédente :

(3) les polynômes :

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \qquad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$$

$p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto p(z)$ sont holomorphes dans $\mathbb{C}$

(4) les fonctions rationnelles :

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$ où $P(z), Q(z)$ polynômes, $Q \not\equiv 0$

Domaine de définition :

$$D_f = \{ z \in \mathbb{C} \mid Q(z) \neq 0 \}$$

$f : D_f \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto f(z)$ sont holomorphes dans D_f.

(5) $f(z) = \overline{z}$ $\qquad f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \overline{z}$ $\qquad z = x+iy$, $\overline{z} = x - iy$

$$\lim_{z \to z'} \frac{f(z) - f(z')}{z - z'} = \lim \frac{\overline{z} - \overline{z'}}{z - z'} = \lim \frac{\overline{z - z'}}{z - z'} \quad \text{existe ?}$$

Soit $h := z - z'$, alors $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\overline{h}}{h} = *$

— si $h \in \mathbb{R}$, alors $\displaystyle * = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$

— si $h \in i\mathbb{R}$, alors $\displaystyle * = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = -1$

donc la limite $(*)$ n'existe pas (dans le sens complexe), c-à-d la dérivée en z' de $f(z) = \overline{z}$ n'existe pas,

$\Rightarrow$ $f(z) = \overline{z}$ n'est nulle part holomorphe.

Les équations de Cauchy – Riemann

Soient : $U \subset \mathbb{C}$ ouvert

$z_0 = x_0 + i y_0 \in U$

$\phi : U \to \mathbb{C}$

Les dérivées partielles de ϕ en z_0 sont définies par ;

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(z_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{\phi(x + i y_0) - \phi(x_0 + i y_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(z_0) := \lim_{y \to y_0} \frac{\phi(x_0 + i y) - \phi(x_0 + i y_0)}{y - y_0}$$

Rmq. Une fonction peut admettre les dérivées partielles en un point sans y être continue

ex.
$$\phi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on peut que les dérivées partielles sont 0 mais ϕ n'est pas continue en $(0,0)$.

Au contraire on a que ; dérivable en $z_0 \Rightarrow$ continue en z_0

donc la dérivabilité (en sens complexe) est une condition plus forte que l'existence des dérivées partielles.

Théorème $U \subset \mathbb{C}$ ouvert $\qquad z = x + iy$

$f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ fonction holomorphe $\qquad f = u + iv$

les parties réelle et imaginaire u et v de f admettent en tout point des dérivées partielles qui satisfont <u>les équations de Cauchy – Riemann</u> :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \qquad (CR)$$

<u>Dém</u>. $f'(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$

$f = u + iv$

$z = z_0 + x, \quad x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow$

$$f'(z_0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(z_0 + x) - f(z_0)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{u(z_0 + x) - u(z_0)}{x} + i \lim_{x \to 0} \frac{v(z_0 + x) - v(z_0)}{x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$$

$z = z_0 + iy, \quad y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow$

$$f'(z_0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(z_0 + iy) - f(z_0)}{iy} =$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{v(z_0 + iy) - v(z_0)}{y} - i \lim_{y \to 0} \frac{u(z_0 + iy) - u(z_0)}{y}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(z_0)$$

$\Rightarrow$ on a trouvé les éq. de CR. $\square$

Proposition Si la partie réelle u et la partie imaginaire v d'une fonction $f = u + iv$, $f : U \to \mathbb{C}$ admettent des dérivées partielles continues qui satisfont les éq. de CR dans U, alors f est holomorphe.

Def.
$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z} := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i \dfrac{\partial}{\partial y} \right) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i \dfrac{\partial}{\partial y} \right) \end{cases}$$

En utilisant ces deux operateurs on peut récrire les eq. de CR :

Prop. $f(z) = u(z) + i v(z)$ $\qquad z = x + iy$

$$(CR) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = - \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \iff \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

Dém.
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)(u + iv) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \qquad \square$$

Rmq.
$$\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)(x + iy) = \frac{1}{2}(1 - 1 + 0 + 0) = 0$$
$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)(x - iy) = \frac{1}{2}(1 + 1 + 0 + 0) = 1$$

Ex. Soit P un polynôme en $z, \bar{z}$:

$$P(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} c_{kl}\, z^k \bar{z}^l \qquad c_{kl} \in \mathbb{C}$$

$P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ f. continue

$$\frac{\partial P}{\partial \bar{z}} = \sum \sum c_{kl}\, z^k\, l\, \bar{z}^{l-1} \neq 0$$ donc les éq. de CR sont vérifiées ssi $c_{kl} = 0$ avec $l > 0$

$\Rightarrow$ P est holomorphe ssi il ne dépend pas de $\bar{z}$.

La fonction exponentielle

Rmq.

(1) cas réel : $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \exp(x) = e^x$

- $\exp \in C^\infty(\mathbb{R})$
- $\frac{d e^x}{dx} = e^x$
- $e^0 = 1$, $e^{x+y} = e^x e^y$, $e^x > 0$

(2) on a défini : $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, $y \in \mathbb{R}$
$|e^{iy}| = 1$

Donc on pose :

Déf. $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
$z = x+iy \longmapsto e^z := e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

Rmq.

(1) $e^0 = e^0 e^{i0} = 1$

(2) $|e^z| = e^x |e^{iy}| = e^x$ $\qquad e^z = |e^z|(\cos y + i \sin y)$

(3) $\arg(e^z) = y \pmod{2\pi} = \mathrm{Im}(z) \pmod{2\pi}$

L'exponentielle de $z = x+iy$ est le nombre complexe de module e^x et argument y.

(4) $$\frac{\partial e^z}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(e^x(\cos y + i \sin y)\right) = \frac{1}{2}\left(e^x(\cancel{\cos y} + i \sin y) + i e^x(-\cancel{\sin y} + i \cancel{\cos y})\right) = 0$$

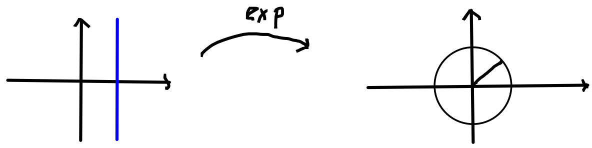
$\Rightarrow$ e^z satisfait les éq. de CR

$\Rightarrow$ e^z est holomorphe sur $\mathbb{C}$

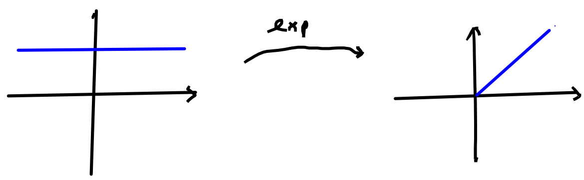
(5) $$e^{z_1} e^{z_2} = \underbrace{e^{x_1+iy_1}}_{e^{x_1} e^{iy_1}} \underbrace{e^{x_2+iy_2}}_{e^{x_2} e^{iy_2}} = e^{x_1+x_2} e^{i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}$$

(6) • l'image de $x = c$ constante par l'exp. est le cercle de rayon e^c centré à l'origine

$$e^z = e^{c+iy} = e^c(\cos y + i \sin y)$$



• l'image de $y = c$ const. par l'exp. est le rayon issu de l'origine avec argument c



$$e^z = e^{x+ic} = e^x(\cos c + i \sin c)$$

(7) Si $a > 0$, $z \in \mathbb{C}$ alors on pose

$$a^z := e^{z \ln a} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

ce prolongement aux exposants complexes de $x \mapsto e^x$ satisfait les règles :

$$(a_1 a_2)^z = a_1^z a_2^z \qquad a^{z_1 + z_2} = a^{z_1} a^{z_2}$$

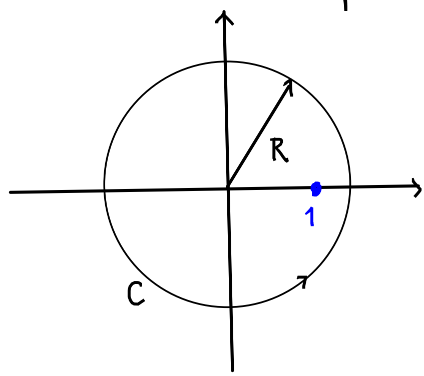
Le calcul integral

Exemple

$$\int_C \frac{1}{z-1}\, dz$$

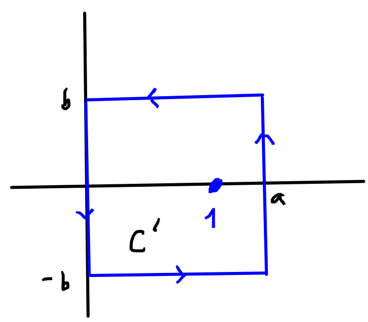
C cercle de rayon $R > 0$ parcouru dans le sens positif.

$$\int_C \frac{1}{z-1}\, dz = \begin{cases} 0 & R < 1 \\ 2\pi i & R > 1 \end{cases}$$



si C' bord du rectangle $[0, a] \times [-b, b] \subset \mathbb{R}^2$

$$\int_{C'} \frac{1}{z-1}\, dz = \begin{cases} 0 & a < 1 \\ 2\pi i & a > 1 \end{cases}$$



Donc la valeur de l'intégrale dépends de la position du pole $z = 1$ de $\frac{1}{z-1}$ par rapport au chemin C. (ou C').

Courbes

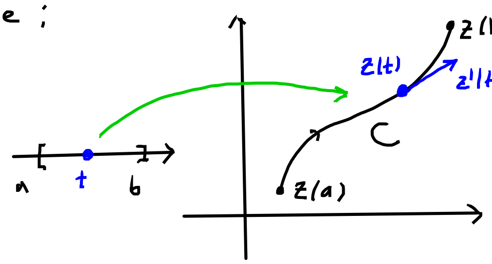
Déf. Une <u>courbe différentiable</u> C est définie par une fonction :

$$[a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto z(t) = x(t) + i\,y(t)$$

admettant une dérivée $z'(t) = x'(t) + i\,y'(t)$ continue et non nulle.

On note par C aussi l'image :

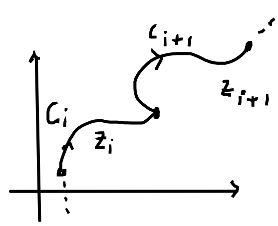
$$C = \{ z \in \mathbb{C} \mid z = z(t) \quad t \in [a,b] \}$$



Rmq. Normalement on utilise arcs de cercle et segments.

Déf. Un <u>chemin</u> (ou courbe différentiable par morceaux) est la réunion d'un nombre fini de courbes différentiables $C_1, \dots, C_n$ données par des fonctions $z_i : [a_i, b_i] \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que $z_i(b_i) = z_{i+1}(a_{i+1})$

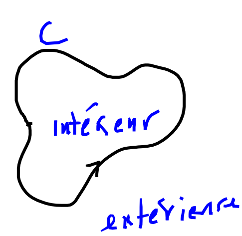
On supposera aussi que tout chemin <u>ne se croise pas.</u>



Si le point de départ $z_1(a_1)$ et le point d'arrivée $z_n(b_n)$ coincident on dira que le chemin est <u>fermé</u>.

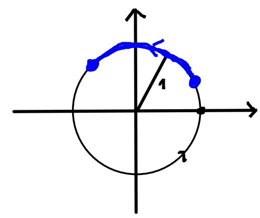
<u>Théorème</u> Un chemin fermé C partage le plan en deux domaines disjoints :

- un domaine borné (l'<u>intérieur</u> de C)
- et un domaine non borné (l'<u>exterieure</u> de C)



Ex. Le cercle unité est un courbe fermée parametrée par

$$z(t) = e^{it} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$



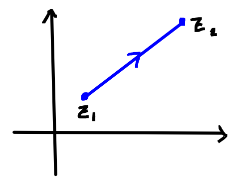
intérieur : $D(0,1)$

exterieur : $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0,1)$

Arc de cercle : $z(t) = R\,e^{it} \qquad \alpha \leq t \leq \beta$
de rayon $R > 0$

Ex. Le segment $[z_1, z_2]$ parametrée par

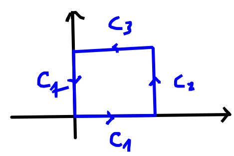
$$z(t) = (z_2 - z_1)t + z_1 \qquad 0 \leq t \leq 1$$



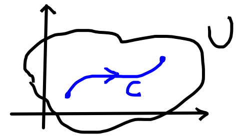
Ex. Le bord du carré : $[0,1] \times [0,1]$ est un chemin $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$

$C_1 = [0,1] \qquad C_2 = [1, 1+i]$

$C_3 = [1+i, i] \qquad C_4 = [i, 0]$



L'intégrale



Soient : $U \subset \mathbb{C}$ ouvert

$f : U \to \mathbb{C}$ f. continue

$C \subset U$ courbe différentiable paramétrée par $z(t)$, $t \in [a,b]$

déf : $$\int_C f(z)\,dz := \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt = \underbrace{\int_a^b Re\big(f(z(t))\,z'(t)\big)dt + i\int_a^b Im\big(f(z(t))\,z'(t)\big)dt}$$

intégrales réelles de fonctions réelles

propriétés :

(1) Soit C une courbe différentiable paramétrée par $z(t)$ $t \in [a,b]$

Soit $[c,d] \to [a,b]$ fonction bijective avec dérivée continue

$s \longmapsto t(s)$ et $t'(s) > 0$ $s \in [c,d]$

Alors $z_1(s) := z(t(s))$ est un reparametrage admissible de la courbe C

$\Rightarrow$ L'intégrale ne dépend pas du paramétrage $z(t)$ de C :

$$\int_c^d f(z_1(s))\,z_1'(s)\,ds = \int_c^d f(z(t(s)))\,z'(t(s))\,t'(s)\,ds = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt$$

intégrale avec C paramétrée par $z_1(s)$

$t = t(s)$ $\quad dt = t'(s)\,ds$

$s = c \Rightarrow t = t(c) = a$

$s = d \Rightarrow t = t(d) = b$

intégrale avec C paramétrée par $z(t)$

(2) Si $[c,d] \to [a,b]$ comme avant mais $t'(s) < 0$

$s \longmapsto t(s)$

la courbe paramétrée par $z_1(s) := z(t(s))$ est noté $-C$

est la courbe parcourue dans le sens inverse.

Dans ce cas :

$$\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz$$

(3) Soit $C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$ un chemin, on pose :

courbes différentiables C_i

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \dots + \int_{C_n} f(z)\,dz$$

(4) <u>linéarité</u> $\int_C \left(\lambda f(z) + \mu g(z)\right) dz = \lambda \int_C f(z)\,dz + \mu \int_C g(z)\,dz$

$\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

(5) <u>additivité</u> $\int_{C_1 + C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$

(6) Soit : $\ell_C := \int_C |dz| = \int_a^b |z'(t)|\,dt$ <u>longueur</u> de C

Alors ; $$\left| \int_C f(z)\,dz \right| = \left| \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt \right|$$
$$\leq \int_a^b |f(z(t))|\,|z'(t)|\,dt$$
$$\leq \sup_{z \in C} |f(z)| \cdot \underbrace{\int_a^b |z'(t)|\,dt}_{\ell_C}$$

donc : $$\left| \int_C f(z)\,dz \right| \leq \ell_C \cdot \sup_{z \in C} |f(z)|$$

Primitive et intégrale

Soient : $D \subset \mathbb{C}$ domaine (ouvert connexe)

$f : D \to \mathbb{C}$ f. holomorphe admettant une primitive F

$F : D \to \mathbb{C}$ holomorphe t.q. $F' = f$

$C \subset D$ chemin d'origine z_1 et d'extrémité z_2

(z_1 : point de départ ; z_2 : point d'arrivée)

$z_1, z_2 \in D$

Alors : $\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt$

par simplicité soit C une courbe paramétrée par $z(t)$ $t \in [a,b]$

$$= \int_a^b \underbrace{F'(z(t))\,z'(t)}_{\frac{d}{dt}F(z(t))}\,dt$$

$$= \Big[F(z(t))\Big]_a^b = F(\underset{\substack{\| \\ z_2}}{z(b)}) - F(\underset{\substack{\| \\ z_1}}{z(a)})$$

$$= \Big[F(z)\Big]_{z_1}^{z_2}$$

ne dépend pas de la courbe C (seulement des points z_1, z_2)

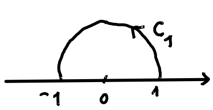
$$\Rightarrow \quad \boxed{\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)}$$

Si la courbe C est fermée, alors $\oint_C f(z)\,dz = 0$.

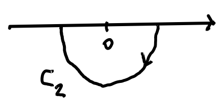
Ex. (1) $n \geq 0$ $\quad \int_C z^n\,dz = \left[\frac{z^{n+1}}{n+1}\right]_{z_1}^{z_2} = \frac{z_2^{n+1} - z_1^{n+1}}{n+1}$

$C = [z_1, z_2]$ segment $\quad z^n$ holomorphe sur $\mathbb{C}$ avec primitive $\frac{z^{n+1}}{n+1}$

(2) $\quad C_1 = \{ z \mid z(t) = e^{it},\ t \in [0,\pi] \}$



$C_2 = \{ z \mid z(t) = e^{-it},\ t \in [0,\pi] \}$



$f(z) = \frac{1}{z}$ holomorphe sur $\mathbb{C}^*$

$\int_{C_1} \frac{1}{z}\,dz = \int_0^\pi \cancel{e^{-it}}\, i\, \cancel{e^{it}}\,dt = i\pi$, $\quad \int_{C_2} \frac{1}{z}\,dz = \int_0^\pi \cancel{e^{it}}(-i)\cancel{e^{-it}}\,dt = -i\pi$

$\oint_{S^1} \frac{dz}{z} = \int_{C_1 - C_2} \frac{dz}{z} = \int_{C_1} \frac{dz}{z} - \int_{C_2} \frac{dz}{z} = i\pi + i\pi = 2\pi i$

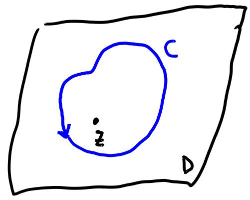
Donc la fonction holomorphe z^{-1} sur $\mathbb{C}^*$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$

Théorèmes de Cauchy

$D \subset \mathbb{C}$ domaine

$f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe

C chemin fermé contenu ainsi que son intérieur dans D.

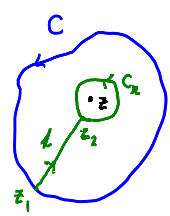


Th.1 $\int_C f(z)\,dz = 0$

Th.2 Soit z un point dans l'intérieur de C

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \qquad (*)$$

C est parcouru dans le sens positif.



Dém. Soit $C' = C + \ell - C_r - \ell$ où

$\ell = [z_1, z_2]$ segment

$C_r = \{\zeta \mid \zeta(t) = z + re^{it},\ t \in [0, 2\pi]\}$ cercle centré en z de rayon $r > 0$

Soit $g(\zeta) := \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$, $g(\zeta)$ est holomorphe dans $D \setminus \{z\}$

$$0 = \int_{C'} g(\zeta)\,d\zeta = \int_C g(\zeta)\,d\zeta + \cancel{\int_\ell g(\zeta)\,d\zeta} - \int_{C_r} g(\zeta)\,d\zeta + \cancel{\int_{-\ell} g(\zeta)\,d\zeta}$$

par le th. précédent puisque l'intérieur de C' est contenu dans D

$$\Rightarrow \int_C g(\zeta)\,d\zeta = \int_{C_r} g(\zeta)\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi \cancel{i}} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{it})}{\cancel{re^{it}}} \cancel{rie^{it}}\,dt$$

ne dépend pas de r

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{it})\,dt \xrightarrow[r \to 0^+]{} f(z) \qquad \square$$

Th.3 $f' : D \to \mathbb{C}$ est holomorphe, est si z dans l'intérieur de D alors:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta$$

Rmq. Pour montrer ce résultat on utilise la formule $(*)$ en prenant la dérivée par z dans les deux côtés.

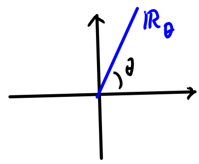
Par récurrence on a que la dérivée n-ième $f^{(n)} : D \to \mathbb{C}$ est holomorphe et

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta, \qquad n \geq 0.$$

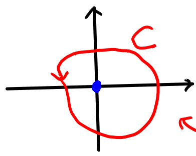
Déf. Un domaine $D \subset \mathbb{C}$ est <u>simplement connexe</u> si pour tout chemin fermé C contenu dans D, l'intérieur de C est aussi contenu dans D.

Ex (1) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_\theta$ est simplement connexe

où $\mathbb{R}_\theta := \{ z = r e^{i\theta} \mid r \geq 0 \}$ rayon issu de l'origine



(2) $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ n'est pas simplement connexe



l'intérieur de C n'est pas contenu dans $\mathbb{C}^*$

Théorème $D \subset \mathbb{C}$ domaine simplement connexe

$f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe

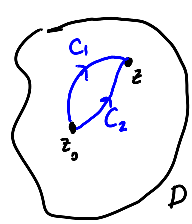
$\Rightarrow$ f admet une <u>primitive</u> F holomorphe sur D, donnée par

$$F(z) := \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{C}\ \text{constante}}}{F(z_0)} + \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta$$

où $z_0 \in D$ et l'intégrale est le long d'un chemin de z_0 à z contenu dans D.

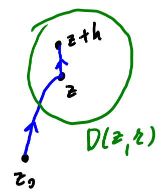
Dém • <u>$F(z)$ ne dépend pas du chemin choisi</u> :

Soient C_1 et C_2 deux chemins de z_0 à z alors $C = C_1 - C_2$ est un chemin fermé et son intérieur est contenu dans D (puisque D est simplement connexe).



$$\underset{(\text{Th. Cauchy})}{\Rightarrow} \quad 0 = \int_C f(\zeta)\, d\zeta = \int_{C_1} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{C_2} f(\zeta)\, d\zeta$$

(cont. ./.)



• Il faut montrer $F'(z) = f(z)$;

Soit $r>0$ t.q. $D(z,r) \subset D$ et $[z, z+h]$ le segment de z à $z+h$ contenu dans $D(z,r)$ (donc $|h|<r$)

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\left(\int_z^{z+h} f(\zeta)\,d\zeta\right) - f(z)$$

$\int_z^{z+h} d\zeta = h$

$$= \frac{1}{h}\int_z^{z+h}\left(f(\zeta)-f(z)\right)d\zeta$$

$\gamma(t) = z+ht$
$t\in[0,1]$

$$= \int_0^1 \left(f(z+ht)-f(z)\right)dt$$

$$\Rightarrow \left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| \leq \int_0^1 \left|f(z+ht)-f(z)\right|dt \leq \sup_{t\in[0,1]}\left|f(z+ht)-f(z)\right| \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0$$

donc; $\displaystyle \underset{F'(z)}{\underset{\|}{\lim_{h\to 0^+}\frac{F(z-h)-F(z)}{h}}} = f(z)$

$\square$

Le logarithme

Rmq (1) $\frac{1}{z} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe (rationnelle)

on a vu que $\int_{S^1} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i$ donc $\frac{1}{z}$ n'admet pas de primitive holomorphe dans $\mathbb{C}^*$.

(2) $\frac{1}{z} : \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe

c'est simplement connexe

par le théorème précédent $\frac{1}{z}$ admet une primitive dans $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$

Déf: Le logarithme est la fonction holomorphe

$$\ln : \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{C}$$

définie par la primitive de $\frac{1}{z}$ suivante :

$$\ln(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$$

Rmq:

(1) $\frac{d}{dz} \ln(z) = \frac{1}{z}$

(2) l'intégrale ne dépend pas du chemin choisi

(3) si $x > 0$, $x \in \mathbb{R}$ alors $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln(x) - \cancel{\ln(1)} = \ln(x)$

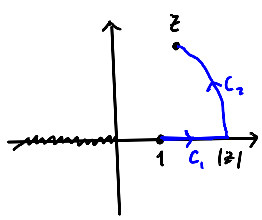
log. usuelle

intégrale réelle

(4) $\ln(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$

$C_1 = [1, |z|]$ segment
$\zeta(t) = t \quad t \in [1, |z|]$

$C_2 = \{ \zeta(t) = |z| e^{it}$
$0 \leq t \leq \arg(z) \}$
arc de cercle



$-\pi < \arg(z) < \pi$

$= \int_{C_1} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{C_2} \frac{d\zeta}{\zeta}$

$= \int_1^{|z|} \frac{dt}{t} + i \int_0^{\arg(z)} \frac{\cancel{|z|} e^{it}}{\cancel{|z|} e^{it}}\, dt$

$= \ln|z| + i \arg(z)$

logarithme réel

$\Rightarrow \quad \underline{\ln(z) = \ln|z| + i \arg(z)}$

rmq On utilise la même formule pour $z \in]-\infty, 0[$ par continuité
si $z \in]-\infty, 0[$ alors $\arg(z) = \pi$

(5) • $\ln 1 = 0$

• $\ln i = \underbrace{\ln|i|}_{=0} + i \underbrace{\arg(i)}_{=\pi/2} = i\frac{\pi}{2}$

• $\ln(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$

• $\ln(-1) = i\pi$

(6) On peut vérifier :

• $e^{\ln z} = \exp\left(\ln|z| + i\arg(z)\right) = e^{\ln|z|} e^{i\arg(z)} = |z|\, e^{i\arg(z)} = z$

$\Rightarrow e^{\ln z} = z$

• $\ln(e^{z}) = z \pmod{2\pi i}$

Séries et séries entières

(1) $(c_n)_{n\geq 0}$ suite des nombres complexes

Déf On dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge vers la somme S si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq 0}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$$

converge vers S.

Déf. On dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ est absolument convergente si $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ est convergente.

condition nécessaire à la convergence

Prop. (1) Si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ est convergente, alors $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,

(2) Si une série converge absolument, alors elle est convergente.

Dém. (1)

$$\begin{array}{ccccc} S_{n+1} & - & S_n & = & c_n \\ \downarrow & & \downarrow & \text{donc} & \downarrow \\ S & & S & & 0 \end{array}$$

(2) Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$ et $\tilde{S}_n = \sum_{k=0}^{n} |c_k|$

$$|S_n - S_m| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} c_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |c_k| = \tilde{S}_n - \tilde{S}_m \qquad (*)$$

$n > m$

inégalité triang.

$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ convergente $\Rightarrow (\tilde{S}_n)$ conv. $\Rightarrow (\tilde{S}_n)$ de Cauchy

$\Rightarrow (S_n)$ de Cauchy $\Rightarrow (S_n)$ conv. $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ conv. $\square$

par (*)

(2) $(c_n)_{n\geq 0}$ suite des nombres complexes

Déf. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ s'appelle série entière centrée en $z_0 \in \mathbb{C}$

Les c_n sont les coefficients de la série.

Déf On dit que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ converge en $z' \in \mathbb{C}$ si la série de nombres complexes $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z'-z_0)^n$ (obtenue par substitution) est convergente.

Ex: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ série entière centrée à $z_0 = 0$ (série géométrique)

$S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$ donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z} = \dfrac{1}{1-z}$ si $|z|<1$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge vers $\dfrac{1}{1-z}$ si $|z|<1$

et si $|z| > 1$ elle diverge.

On a que $\sum_{n=0}^{\infty} |z^n|$ est aussi convergente puisque

$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} |z|^k = \lim \dfrac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|} = \dfrac{1}{1-|z|}$ si $|z|<1$

donc la série géometrique est absolument convergente si $|z|<1$.

(3) Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$ série entière centrée en z_0

Le domaine de convergence de la série entière est le disque $D_R(z_0)$ $\quad 0 \leq R \leq +\infty$

$\uparrow$ rayon de convergence

c-à-d :

(i) si $R = +\infty$, alors la série converge absolument sur $\mathbb{C} = D_{+\infty}(z_0)$

(ii) si $R = 0$, alors la série diverge sur $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$
(en z_0 elle est toujours égale à c_0)

(iii) si $0 < R < +\infty$ alors :

- elle converge absolument en z t.q. $|z-z_0| < R$
(c-à-d $z \in D_R(z_0)$)
- elle diverge si $|z-z_0| > R$
- sur le cercle $|z-z_0| = R$ elle peut être convergente ou divergente.

Dém. Pour simplicité $z_0 = 0$. Il suffit de montrer :

Lemma Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge en $z = z_1$, alors elle converge absolument pour tout z t.q. $|z| < |z_1|$.

Dém (lemma) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge en z_1 $\Rightarrow$ $a_n z_1^n \longrightarrow 0$

$\Rightarrow |a_n||z_1|^n \longrightarrow 0$ donc

$M := \sup\{|a_n||z_1|^n, n \geq 0\} < +\infty$ (puisque une suite convergente est bornée)

$$\Rightarrow \quad |a_n z^n| = |a_n||z_1|^n \left|\frac{z}{z_1}\right|^n \leq M \left|\frac{z}{z_1}\right|^n$$

Par le théorème de comparaison des séries réelles,
si $|z| < |z_1|$ alors $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z_1}\right|^n$ converge (série géométrique), donc
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolument. $\square$

(cont.) Ça suffit de poser : $R = \sup\left\{ |z| \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ converge} \right\}$ $\square$

(4) <u>Thm.</u> Soit $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ une série entière centrée en z_0 avec rayon de convergence $R > 0$, et soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ la fonction définie par la somme sur $D_R(z_0)$. Alors :

(i) $f(z)$ est <u>holomorphe</u> sur $D_R(z_0)$

(ii) la série entière $\sum_{n=\cancel{0}\,1}^{\infty} c_n\, n\, (z-z_0)^{n-1}$ (dérivée formelle)
a le même rayon de convergence R et <u>converge à la dérivée de $f(z)$</u> dans $D_R(z_0)$:

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, c_n (z-z_0)^{n-1} \qquad |z-z_0| < R$$

<u>Rmq.</u> Donc la fonction $f(z)$ est <u>différentiable un nombre arbitraire de fois</u> avec

$$f^{(k)}(z) = \sum_{\substack{n=0 \\ \uparrow\, n=k}}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\, c_n\, (z-z_0)^{n-k} \qquad |z-z_0| < R$$

En particulier pour $z = z_0$: $\qquad k! = k(k-1)\cdots 2\cdot 1$

$$f^{(k)}(z_0) = k!\, c_k \quad \Rightarrow \quad c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ est <u>la série de Taylor de $f(z)$.</u>

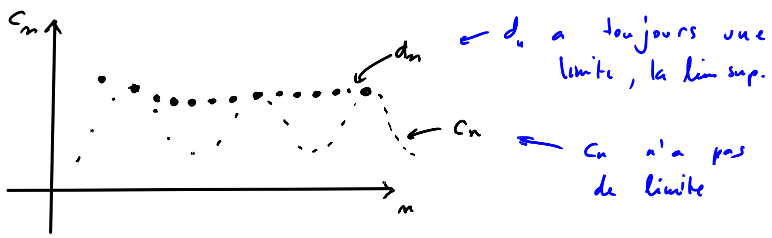
(5) Théorème de Cauchy - Hadamard

Le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ est donné par : $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}}$.

Rmq : Soit $(c_n)_{n\geq 0}$ suite de réels. La suite $(d_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$d_n := \sup\limits_{k\geq n} c_k = \sup\{c_k \mid k\geq n\} \in]-\infty, +\infty]$

est décroissante, donc convergente à une limite dans $[-\infty, +\infty]$ que on note $\limsup\limits_{n\to+\infty} c_n$ (la "limite sup" ou "limite supérieure")



Si la suite $(c_n)_{n\geq 0}$ admet une limite (finie ou infinie) alors : $\limsup\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n$

Mais la lim sup existe toujours, même si la limite n'existe pas.

(6) Critère de D'Alembert

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ existe, alors il est égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$.

Ex : • $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$ $\quad R = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{1/n}{1/(n+1)}\right| = \lim \dfrac{n+1}{n} = 1$

donc elle définit une fn holomorphe dans $D_1(0)$.

• $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ $\quad R = \lim \left|\dfrac{1/n!}{1/(n+1)!}\right| = \lim \left|\dfrac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim (n+1) = +\infty$

• $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$ $\quad R = \lim \left|\dfrac{1/(n+1)!}{1/n!}\right| = 0$

(7) Série exponentielle

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \Rightarrow \quad R = +\infty \qquad \text{donc} \quad f(z) \text{ est holomorphe sur } \mathbb{C}$$

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = f(z) \quad \Rightarrow \quad f(z) = c\, e^z$$

$$f(0) = 1 = c \quad \Rightarrow \quad f(z) = e^z$$

Donc: $$e^z = \sum_{n \geq 0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{sur } \mathbb{C}$$

(8) Série du logarithme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z-1)^n \quad \text{série entière centrée en } z_0 = 1$$

$$R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{1/n}{1/(n+1)} \right| = 1$$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z-1)^n \quad \text{définit une fn holomorphe dans } D_1(1)$$

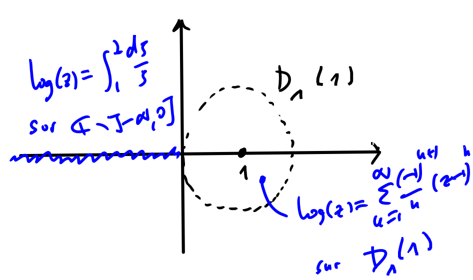
$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} n (z-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (1-z)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n = \frac{1}{1-\zeta}$$

$$\zeta = 1 - z \qquad |\zeta| < 1$$

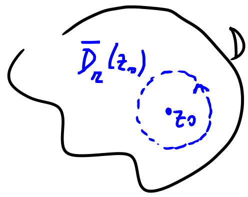
$$= \frac{1}{z} \qquad |z-1| < 1 \qquad f(1) = 0$$

On avait défini: $$\log(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} \quad \Rightarrow \quad (\log(z))' = \frac{1}{z}, \quad \log(1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \log(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z-1)^n \qquad \text{dans } D_1(1)$$



Rmq: $$\log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \qquad |z| < 1$$



Théorème de Taylor

Soit $D \subset \mathbb{C}$ domaine tel que $\bar{D}_r(z_0) \subset D$, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe

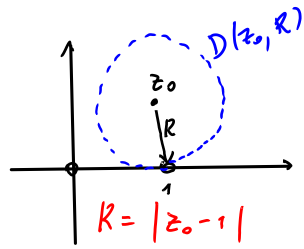
alors
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad , \quad |z - z_0| < r$$

" la série converge $D(z_0, r)$ à la fn $f(z)$ "

où
$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, d\zeta$$

(Th. Cauchy)

$C_r(z_0)$ cercle de centre z_0 et rayon r parcouru dans le sens positif.



Ex $\quad f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)} \qquad D = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$

pour tout $r < R$ $\bar{D}(z_0, r) \subset D = \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ donc

la série de Taylor $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ converge sur $|z - z_0| < r$

$\Rightarrow$ le rayon de conv. de cette série est R.

Une fonction holomorphe dans le plan $\mathbb{C}$ est dite <u>entière</u>.

<u>Théorème (Liouville)</u> Une fonction entière et bornée est constante.

<u>Dém</u> La série entière associée $\sum_{n=0}^{\infty} a_k z^k$ est convergente pour $z \in \mathbb{C}$.

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi \cancel{i}} \int_0^{2\pi} f(Re^{it})\, R^{-k-\cancel{1}}\, e^{-i(k+\cancel{1})t}\, \cancel{R}\, e^{it}\, \cancel{i}\, dt$$

↳ Cercle centré en 0 rayon $R > 0$ paramétré par $\zeta(t) = Re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$

$$|a_k| \le \frac{R^{-k}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(Re^{it}) \right| dt \le \frac{M}{2\pi R^k} \int_0^{2\pi} dt = \frac{M}{R^k}$$

fixé

$R > 0$

où on a que f est bornée $|f(z)| \le M$

$\Rightarrow a_k = 0 \quad k \ge 1$

$\Rightarrow f(z) = a_0$ donc constante.

$\square$

<u>Rmq</u>: On a montré que en général on a

$$|a_k| \le R^{-k} \max_{|z|=R} |f(z)| \qquad \text{(inégalités de Cauchy)}$$

<u>Démonstration théorème fondamentale de l'algèbre</u>:

Soit $P(z)$ un polynôme pas constant à coeff. complexes.

Par l'absurde : supposons que $P(z) \neq 0$ pour $z \in \mathbb{C}$.

Alors $f(z) := \frac{1}{P(z)}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ donc f est <u>entière</u>

et $|f(z)| \longrightarrow 0$ si $|z| \to +\infty$ (puisque $|P(z)| \longrightarrow +\infty$)

donc $f(z)$ est <u>bornée</u>.

$\underset{\text{Th. Liouville}}{\Rightarrow}$ $f(z)$ est une constante. $\Rightarrow$ $P(z)$ est constant IMP.!

$\Rightarrow P(z) = 0 \quad \exists z \in \mathbb{C}$.

$\square$

Zéros $\qquad f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe, $\qquad D \subset \mathbb{C}$ domaine

déf. On dit que $z_0 \in D$ est un zéro de f si $f(z_0) = 0$

" " " " zéro de f d'ordre $m \geq 1$ si

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \qquad a_m \neq 0$$

$$= a_m (z-z_0)^m + a_{m+1} (z-z_0)^{m+1} + \dots$$

théorème Les zéros d'une fonction holomorphe non-nulle sont isolés.

dém. Soit $z_0 \in D$ un zéro de f. Il faut montrer qu'il existe $\delta > 0$ t.q. si $0 < |z-z_0| < \delta$ alors $f(z) \neq 0$. Dans un voisinage de z_0 on a que

$$f(z) = \sum_{k \geq m}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = (z-z_0)^m \underbrace{\sum_{k=m}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k-m}}_{= g(z) \text{ holomorphe}} = (z-z_0)^m g(z)$$

$g(z_0) = a_m \neq 0$

donc par continuité de g il existe un voisinage de z_0 où $g(z) \neq 0$. $\square$

Principe de prolongement analytique

$D \subset \mathbb{C}$ domaine (connexe!), $z_0 \in D$, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe

Proposition Les quatre énonces suivants sont équivalents :

(1) $f \equiv 0$ sur D (identiquement égale à zéro sur D)

(2) $f \equiv 0$ sur un voisinage de z_0

(3) $f^{(n)}(z_0) = 0$ pour $n \geq 0$

(4) f est nulle sur un ensemble de point possedant un point d'accumulation dans D

Rmq. Un point z est d'accumulation pour $E \subset \mathbb{C}$ si tout voisinage de z contient un autre point de E.

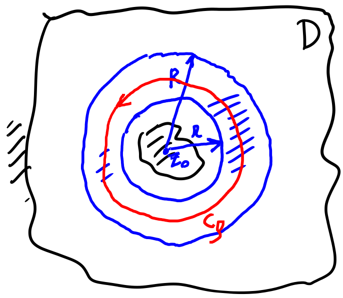
Rmq. Deux fonctions holomorphes dans un domaine D, qui coïncident sur un ensemble possedant un point d'accumulation dans D, coïncident sur tout D.

Théorème (de Laurent)

$r, R \in [0,+\infty]$

$D \subset \mathbb{C}$ domaine contenant la couronne $\{ z \in \mathbb{C} \mid r \leq |z-z_0| \leq R \}$ centrée en z_0

$f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe



Alors : $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k \qquad r < |z-z_0| < R$

développement en série de Laurent

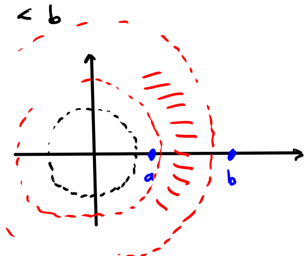
où

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, d\zeta \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$C_\rho(z_0)$ cercle centré en z_0 de rayon ρ $\quad r \leq \rho \leq R$
parcouru dans le sens positif

Exemple

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)} \qquad 0 < a < b$$



• Dans le disque $|z| < a$, par le th. de Taylor :

$$f(z) = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a}\right) = \frac{1}{b-a}\left(-\frac{1}{b}\frac{1}{1-\frac{z}{b}} + \frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{z}{a}}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a^{k+1}} - \frac{1}{b^{k+1}}\right) z^k$$

$\left|\frac{z}{b}\right| < 1, \left|\frac{z}{a}\right| < 1 \qquad \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$ série géom.

• Dans la couronne $a < |z| < b$, par le th. de Laurent :

$$f(z) = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a}\right)$$

$\left|\frac{z}{b}\right| < 1 \quad \left|\frac{z}{a}\right| > 1 \Rightarrow \left|\frac{a}{z}\right| < 1$

$$= \frac{1}{b-a}\left(-\frac{1}{z}\frac{1}{1-a/z} - \frac{1}{b}\frac{1}{1-z/b}\right) = \frac{-1}{b-a}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{z^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{b^{k+1}}\right)$$

série de Laurent

puissances négatives de z

• À l'extérieur du disque $|z| > b$ (donc $r = b$, $R = +\infty$) par le th. de Laurent

$$f(z) = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{b^k - a^k}{b-a}\right) \frac{1}{z^{k+1}}$$

$\left|\frac{a}{z}\right| < 1 \quad \left|\frac{b}{z}\right| < 1$

Singularité isolée

Un point z_0 est une singularité isolée pour f si f est holomorphe dans un disque pointé $\{ z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < R \}$ centré en z_0

Trois cas :

(1) singularité apparente : si le développement de Laurent ne contient aucun terme $(z-z_0)^k$ avec $k < 0$.

(équiv. : la limite $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existe finie)

(2) pôle d'ordre m ; si $f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ $\quad a_{-m} \neq 0$

m est l'ordre du pôle z_0

(équiv. : $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$)

(3) singularité essentielle : si le développement de Laurent contient un nombre infini de termes $(z-z_0)^k$ avec $k < 0$.

(équiv. : la limite $z \to z_0$ de f n'existe pas)

Ex : • La fn $e^{1/z}$ a une singularité essentielle à l'origine

$\lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = +\infty$ $\qquad \lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0$ $\qquad \lim_{y \to 0} e^{1/iy}$ n'existe pas.

• $\frac{\sin(z)}{z}$ a une singularité apparente en $z = 0$

• $\frac{\cos(z)}{z}$ a un pôle en $z = 0$

Déf. Une fonction meromorphe dans un domaine $D \subset \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe sur $D \setminus S$ et tout point de S est un pôle pour f.

tous isolés

Ex. Toute fonction rationnelle est meromorphe.

$\frac{\sin(z)}{z^3}$, $\frac{\cos(z)}{z^4 - 1}$ sont meromorphes.

Résidus

$D \subset \mathbb{C}$ domaine , $f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe , z_0 singularité isolée pour f

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad 0 < |z - z_0| < \delta$$

Le <u>résidu de f</u> en z_0 est : $\underset{z=z_0}{\text{Rés}}(f) = \underline{\underline{a_{-1}}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} f(\zeta)\, d\zeta$

↖ cercle de rayon $0<\rho<\delta$ centré en z_0 parcouru dans le sens positif

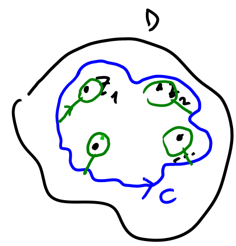
<u>Ex.</u> • $e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} = 1 + \underline{\underline{z^{-1}}} + \frac{z^{-2}}{2} + \cdots$

$\Rightarrow \underset{z=0}{\text{Rés}}\, e^{1/z} = 1$

• $\frac{\sin z}{z^3} = \frac{z - \frac{z^3}{6} + \cdots}{z^3} = z^{-2} - \frac{1}{6} + \cdots \Rightarrow \underset{z=0}{\text{Rés}}\left(\frac{\sin z}{z^3}\right) = 0$

Théorème des résidus

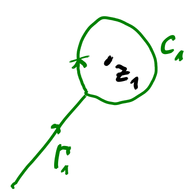
$D \subset \mathbb{C}$ domaine , f holomorphe dans $D \setminus S$ avec des singularités isolées aux points de S



C chemin fermé contenu ainsi que son intérieur dans D ne passant pas par S contenant un nombre fini de singularités $z_1, \ldots, z_n \in S$

Alors : $\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{\text{Rés}}(f)$ $\qquad z_1, z_2, \cdots \in S$

<u>Dém.</u> le chemin $C' = C + \Gamma_1 + C_1 - \Gamma_1 + \cdots + \Gamma_n + C_n - \Gamma_n$



$\int_{C'} f(z)\, dz = 0$ par le th. de Cauchy puisque $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur de C'

$0 = \int_C f(z)\, dz + \int_{C_1} f(z)\, dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)\, dz \Rightarrow \int_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_i}{\text{Rés}} f$

$\int_{C_i} f(z) = -2\pi i \underset{z=z_i}{\text{Rés}} f(z)$

□

<u>Ex</u> $\int_C e^{1/z}\, dz = \begin{cases} = 0 & \text{si la singularité 0 est à l'extérieur du chemin } C \\ 2\pi i\, \text{Rés}\, e^{1/z} = 2\pi i & \text{si 0 est intérieur à } C \end{cases}$

Applications du th. des résidus

$$\hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-i\xi x}\, dx \qquad \hat{f} \text{ transformée de Fourier de } \frac{1}{1+x^2}$$

$\underline{\underline{\xi \le 0}}$

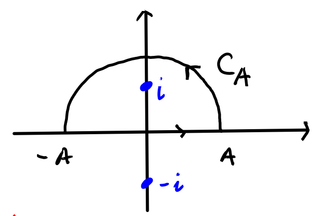
Th. résidus

$$\int_{C_A} \frac{e^{-i\xi z}}{1+z^2}\, dz = 2\pi i \operatorname*{Rés}_{z=i} \frac{e^{-i\xi z}}{1+z^2} = 2\pi i \frac{e^{-i\xi i}}{2i} = \pi e^{\xi}$$

singularités : $1+z^2=0$

$\Rightarrow z = i, -i$

ne dépend pas de A



$A>0$

$$= \int_{-A}^{A} \frac{e^{-i\xi x}}{1+x^2}\, dx + \int_0^{\pi} \frac{\exp(-i\xi A e^{it})}{1+A^2 e^{2it}} A e^{it} i\, dt$$

$1+z^2 = (z+i)(z-i)$

$z(t) = A e^{it} \quad t \in [0,\pi]$

demi cercle

$\downarrow A \to +\infty \qquad (*) \downarrow A \to +\infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\xi x}}{1+x^2}\, dx \qquad 0$$

$\xi \le 0$

$$\Rightarrow \hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-i\xi x}\, dx = \pi e^{\xi}$$

$(*)$ est vrai, puisque :

$$\left| \int_0^{\pi} \frac{\exp(-i\xi A e^{it})}{1+A^2 e^{2it}} iA e^{it}\, dt \right| \le A \int_0^{\pi} \frac{e^{\xi A \sin t}}{|1+A^2 e^{2it}|}\, dt$$

$\downarrow A \to +\infty$

0

car $\xi A \sin t \longrightarrow -\infty$

Si $\underline{\underline{\xi \ge 0}}$ alors $\hat{f}(\xi) := \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-i\xi x}\, dx = \pi e^{-\xi}$

dans le cas $\xi \ge 0$ on utilise :

$$\Rightarrow \hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-i\xi x}\, dx = \pi e^{-|\xi|}$$