Contrôle continu du 17 mars 2023, 10h15-12h15.

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. Dessiner les sous-ensembles suivants du plan complexe $\mathbb{C}$ et dire s'ils sont des domaines :

a. $\{z \in \mathbb{C} \big| \operatorname{Im}(z) < 1\}$
b. $\{z \in \mathbb{C} \big| |\operatorname{Re}(z)| > 1\}$
c. $\{z \in \mathbb{C} \big| |z-1| \leqslant 3\}$
d. $\{z \in \mathbb{C} \big| \arg(z-1) < \frac{\pi}{6}\}$
e. $\{z \in \mathbb{C} \big| |z-1| = \operatorname{Re}(z)\}$

2.
a. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de :
$$\frac{1+i}{1+3i}, \qquad (1+i)^8, \qquad \operatorname{Log}(i \times e).$$
b. Calculer le module et l'argument de :
$$-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}, \qquad \exp\big(i \times e^{\frac{7\pi i}{4}}\big).$$

3. Montrer que la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par
$$f : z = x + iy \mapsto x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$$
est holomorphe, en vérifiant le équations de Cauchy-Riemann.

4. Soit $\mathcal{C}$ le segment joignant 0 et $1+i$. En utilisant la définition de l'intégrale complexe calculer
$$\int_{\mathcal{C}} (x - y + ix^2) dz$$
où $z = x + iy$.

5. On considère l'intégrale suivante :
$$\int_{\mathcal{C}'} \frac{1}{z^2 - 1} dz$$
où le chemin $\mathcal{C}'$ est le cercle de centre $-\frac{1}{2}$ et de rayon 1 parcouru dans le sens positif. En utilisant les théorèmes de Cauchy, calculer la valeur de l'intégrale.

6. Trouver le domaine de convergence de la série entière suivante :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (z-1)^n.$$