1. a. $\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$, b. $\left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^3=\left(\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^6=\left(e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^6=\mathrm{i}$, c. -1, d. $-2+\mathrm{i}\frac{3}{2}$, e. 2.

2. a. $|z|=1,\ \mathrm{Arg}(z)=\pi/2$, b. $|z|=3,\ \mathrm{Arg}(z)=\pi$, c. $|z|=\sqrt{2},\ \mathrm{Arg}(z)=-\pi/4$, d. $|z|=1,\ \mathrm{Arg}(z)=2\pi/3$, e. $|z|=1,\ \mathrm{Arg}(z)=-\pi/2$, f. $|z|=1,\ \mathrm{Arg}(z)=6\pi/7$, g. $|z|=125,\ \mathrm{Arg}(z)=\arctan(117/44)$, h. $|z|=1/4,\ \mathrm{Arg}(z)=0$.

7. Puisque $z\bar{z}=1$ on a que

$$\frac{z-1}{z+1}=\frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{|z+1|^2}=\frac{2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)}{|z+1|^2},$$

donc

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=\begin{cases}\pi/2 & \mathrm{Im}(z)>0,\\ -\pi/2 & \mathrm{Im}(z)<0.\end{cases}$$

10. a. $e^{\mathrm{i}\pi(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}k)}$ pour $k=0,1,2$, b. $e^{\pi\mathrm{i}k/4}$ pour $k=0,\dots,8$, c. $2^{2/5}e^{\pi\mathrm{i}\frac{2k+1}{20}}$ pour $k=0,\dots,4$,

11. a. N'existe pas, comme on peut voir en considérant des sous-suites avec $n=4k$ et $n=4k+2$. b. 0, car $\left|n\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^n\right|=n2^{-n/2}$ tend vers zéro.

13. a. La demi-droite $\mathbb{R}_+$. b. La parabole $y^2=4a^2(a^2-x)$. c. L'image de la demi-droite d'argument θ est la demi-droite d'argument 2θ et l'image du cercle de rayon r est le cercle de rayon r^2. d. Pas injective mais surjective. e. Elle est surjective puisque si $z=|z|e^{\mathrm{i}\theta}\neq 0$ pour $-\pi<\theta<\pi$ alors la racine $\sqrt{|z|}e^{\mathrm{i}\theta/2}\in\mathbb{C}^+$ (et si $z=0$ la racine est 0) ; l'autre racine n'appartient pas à $\mathbb{C}^+$ donc f est injective.

14. On a que $w=f(z)$ si et seulement si $z^2-2wz+1=0$. Les deux racines de ce polynôme sont données par $z_{1/2}=w\pm\delta$, où δ est une racine carrée de w^2-1, et satisfont $z_1z_2=1$ et $z_1+z_2=2w$. C'est donc facile de montrer l'injectivité et la surjectivité de f.

15. Si $z=x+\mathrm{i}y$ et $f=u+\mathrm{i}v$ alors $u=x^2-y^2$ et $v=2xy$. f est holomorphe puisque les dérivées partielles de u et v existent et sont continues et les équations de CR sont vérifiées :

$$u_x=2x=v_y,\qquad u_y=-2y=-v_x.$$

16. Dans ce cas $u=x$ et $v=-y$. Les équations de CR ne sont pas vérifiées puisque $u_x=1$ et $v_y=-1$.