

Plan complexe

1. Trouver la partie réelle et imaginaire des nombres complexes suivants :

- | | |
|---------------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| a. $\frac{1}{1-i}$, | d. $\left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$, |
| b. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$, | e. $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$. |
| c. $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$, | |

2. Trouver module et argument des nombres complexes suivants :

- | | |
|-------------------------------------------|------------------------------------------------|
| a. i , | e. $\frac{1-i}{1+i}$, |
| b. -3 , | f. $-\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$, |
| c. $1 + i^{123}$, | g. $(-4 + 3i)^3$, |
| d. $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, | h. $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}$. |

3. Faire le dessin des sous-ensembles du plan complexe \mathbb{C} suivants :

- | | |
|-----------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| a. $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$, | f. $\{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{\pi}{4}\}$, |
| b. $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq 1\}$, | g. $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \leq 1\}$, |
| c. $\{z \in \mathbb{C} \mid z \leq \sqrt{2}\}$, | h. $\{z \in \mathbb{C} \mid z - i < 1\}$, |
| d. $\{z \mid \operatorname{Re}(z) \geq 1\} \cap \{z \mid z \leq \sqrt{2}\}$, | i. $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg(z) < \frac{\pi}{4}\}$. |
| e. $\{z \in \mathbb{C} \mid z - i = 1\}$, | |

4. Lesquels des ensembles de l'exercice précédent sont ouverts, fermés, bornés, compacts, connexes ?

5. Une rotation $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ d'un angle θ autour de l'origine du plan est une application linéaire représentée par

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto R(v) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Montrer que la multiplication complexe par $e^{i\theta}$ d'un nombre complexe $z = x + iy$ correspond à une rotation du vecteur réel v d'un angle θ .

6. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Prouver que :

a. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,

b. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$,

c. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$,

d. $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$,

e. $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$,

f. $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$,

g. $(x + iy)^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$.

7. Soit $z \neq \pm 1$ un nombre complexe de module unité. Déterminer l'argument de

$$\frac{z - 1}{z + 1}.$$

8. À partir de l'inégalité triangulaire, prouver que pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\max(|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)|) \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|.$$

9. Montrer que pour $\operatorname{Re}(z) > 0$ on a que $\operatorname{Arg}(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

10. Trouver toutes les solutions complexes des équations suivantes :

a. $z^3 = i$,

b. $z^8 = 1$,

c. $z^5 - 1 = i$,

d. $(z - 1)^3 - 1 = 0$,

e. $z^2 + 6z + 10 = 0$,

f. $z^2 + (1 + 4i)z - (5 + i) = 0$.

11. Calculer les limites suivantes :

a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n i^n}{n+1}$,

b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$.

12. En utilisant l'exercice 8, montrer que la suite complexe $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers z si et seulement si les suites réelles $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$, respectivement.

Fonctions complexes

13. On considère la fonction complexe $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par $f(z) = z^2$.

a. Trouver l'image de la droite $\operatorname{Im}(z) = 0$.

b. Trouver l'image de la droite $\operatorname{Re}(z) = a$, pour un nombre réel fixé a .

c. En utilisant les coordonnées polaires, trouver l'image des demi-droites et des cercles centrés à l'origine.

d. La fonction f est injective? Surjective?

e. Montrer que f est une bijection entre \mathbb{C}^+ et $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$, où \mathbb{C}^+ est le demi-plan

$$\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}.$$

14. Soit $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ l'extérieur du cercle unité. Montrer que la fonction

$$f : E \rightarrow \mathbb{C} \setminus [-1, 1], \quad z \mapsto f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

est bijective.

Équations de Cauchy-Riemann

15. En utilisant les équations de Cauchy-Riemann, montrer que la fonction $f(z) = z^2$ est holomorphe.

16. En utilisant les équations de Cauchy-Riemann, montrer que la fonction $f(z) = \bar{z}$ n'est pas holomorphe.

17. Déterminer les conditions sur les constantes réelles a, b, c et d qui rendent la fonction

$$z = x + iy \quad \mapsto \quad f(z) = ax + by + i(cx + dy)$$

holomorphe.

18. Soit $u(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$. Trouver toutes les fonctions $v(x, y)$ telle que la fonction $z = x + iy \mapsto f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est holomorphe.

19. Montrer que la fonction

$$\log(z) := \log |z| + i\text{Arg}(z)$$

est holomorphe pour $\text{Re}(z) > 0$.

20. Calculer $\frac{\partial}{\partial z}$ and $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ pour les fonctions suivantes :

- a. $|z|$, c. $|z - a|^p, a \in \mathbb{C}, p \in \mathbb{Z}$.
b. $(z - a)^p, a \in \mathbb{C}, p \in \mathbb{Z}$,

21. Étant donnée une fonction holomorphe $f(z)$, montrer que :

- a. $\frac{\partial}{\partial z} |f(z)| = \frac{1}{2} |f(z)| \frac{f'(z)}{f(z)}$, b. $\frac{\partial}{\partial z} \text{Re}(f(z)) = \frac{1}{2} f'(z)$,
c. $\frac{\partial}{\partial z} \text{Im}(f(z)) = \frac{1}{2i} f'(z)$.

22. Montrer que les fonctions des exercices 13 et 14 sont biholomorphes (entre des ensembles à spécifier).