1. Par définition d'intégrale on a :

$$\int_\gamma (z-c)^n dz = \mathrm{i} r^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}(n+1)t} dt.$$

On peut facilement calculer cette intégrale réelle en trouvant une primitive, qui sera périodique de période 2π, sauf si $n = -1$.

2. La fonction e^z est holomorphe sur $\mathbb{C}$, donc on peut en trouver une primitive holomorphe, bien évidemment e^z. Puisque les deux chemins ont les mêmes extremes, les intégrales ont la même valeur :

$$\int_{\gamma_1} e^z dz = \int_{\gamma_2} e^z dz = [e^z]_0^{1+\mathrm{i}} = e^{1+\mathrm{i}} - 1.$$

L'intégrale sur le lacet $\gamma_1 - \gamma_2$ est donc zéro. On peut aussi trouver le même résultat en utilisant la définition de l'intégrale.
Au contraire, la fonction $|z|^2$ n'est pas holomorphe, il faut donc appliquer directement la définition de l'intégrale :

$$\int_{\gamma_1} |z|^2 dz = \int_0^1 [(t^2 + t^4) + 2\mathrm{i}(t^3 + t^5)] dt = \frac{8}{15} + \mathrm{i}\frac{5}{6}.$$

De la même façon on trouve que l'intégrale le long du chemin γ_2 est égale à $\frac{5}{6} + \mathrm{i}\frac{8}{15}$. L'intégrale sur le lacet $\gamma_1 - \gamma_2$ n'est pas donc zéro.

4. La fonction intégrande est entière et on peut aisément en trouver un primitive.

6. Une primitive de $f(z)$ est évidemment donnée par $-z^{-1}$, même si son domaine de définition $\mathbb{C}^*$ n'est pas simplement connexe. Puisque on a une primitive l'intégrale est zéro :

$$\int_{S^1} z^{-2} dz = -[z^{-1}]_1^1 = 0.$$

La réponse à la deuxième question est affirmative, puisque l'argument utilisé pour montrer l'existence d'une primitive holomorphe sur un domaine simplement connexe reste valide, car l'intégrale entre z_0 et z ne depends pas du chemin choisi.

7. Remarquer qu'on peut simplifier la fonction intégrande $f(z)$:

$$f(z) = \frac{z + \mathrm{i}}{(z+1)(z-1)}.$$

Elle est donc holomorphe sur son domaine de définition $\mathbb{C}\setminus\{\pm 1\}$. L'intérieur du chemin γ n'est pas contenu dans le domaine de définition de $f(z)$. On considère le chemin $\tilde{\gamma}$ donné par γ et par deux petits cercles C_j autour des points ± 1 liées à γ par des segments parcourus dans le deux directions. L'intérieur de $\tilde{\gamma}$ est contenu dans le domaine de $f(z)$, donc par le premier théorème de Cauchy on a que

$$0 = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz - \sum_{j=\pm 1} \int_{C_j} f(z)dz$$

où la contribution des intégrales le long des segments est zéro. Pour le deuxième théorème de Cauchy on a par exemple

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_1} \frac{g(z)}{z-1} dz = 2\pi \mathrm{i} g(1) = \frac{2\pi \mathrm{i}}{1-\mathrm{i}},$$

puisque $g(z)$ est holomorphe à l'intérieur de C_1. On trouve donc

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi \mathrm{i}.$$

De la même façon, dans le cas du deuxième chemin on trouve que l'intégrale vaut -2π. Puisque l'intégrale a deux valeurs différentes sur les deux chemins, il n'est pas possible de deformer le premier dans l'autre sans sortir du domain d'holomorphie de $f(z)$.

8. Les deux intégrales valent 0 et πi.

9. Les deux intégrales valent 2πi et 0.

10. a. $\pi(e-1/e)$, b. 0, c. $\pi \mathrm{i}(e-1/e)$, d. 0, e. $-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}$, f. $-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}(e+1/e)$.

12.

$$\frac{-2\pi \mathrm{i}}{(b-a)^n}$$

13. a. 2πi, b. $\pi \mathrm{i}(2-e)$, c. $-\pi \mathrm{i} e$.

14. a. $R=1$, b. $R=1$, c. $R=+\infty$, d. $R=1/e$, e. $R=\frac{1}{k^k}$.

17. $R=4$, puisque la singularité 1 est apparente.

18. Pour $z \sim 0$ on a

$$f(z) = 1 + z + \frac{3}{2}z^2 + \dots$$

et $R=1$ puisque $z=1$ est une singularité (essentielle).

21. Supposons d'avoir montré que

$$f(z) = P(z) + o(1/z) \qquad z \to \infty, \tag{1}$$

pour un polynôme $P(z)$. Alors par le théorème de Liouville $f(z) = P(z)$ (expliquer pourquoi).
La façon la plus simple d'arriver à (1) est d'utiliser la caractérisation des singularités isolées : $f(1/z)$ tend en module à $+\infty$ pour $z \to 0$, donc elle a un pôle en 0, donc elle est de la forme

$$f(1/z) = P(1/z) + o(z) \qquad z \to 0,$$

pour un polynôme $P(z)$.
Comment montrer (1) sans utilisé cette caractérisation ? Suggestion : considérer

$$g(z) = \frac{1}{f(1/z)}.$$