Intégrale le long d'un chemin

1. Soit γ le chemin donné par $z(t) = c + re^{\mathrm{i}t}$ pour $t \in [0, 2\pi]$ avec $r > 0$ et $c \in \mathbb{C}$. En utilisant directement la définition d'intégrale, montrer que

$$\int_\gamma (z-c)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1, \\ 2\pi\mathrm{i} & \text{si } n = -1. \end{cases}$$

2. Intégrer la fonction e^z sur le chemin γ_1 donné par $z(t) = t + \mathrm{i}t^2$ pour $t \in [0, 1]$; sur le chemin γ_2 donné par $z(t) = t^2 + it$ pour $t \in [0, 1]$; et sur le chemin $\gamma_1 - \gamma_2$.
Faire le même calcul pour la fonction $|z|^2$.

3. En utilisant directement la définition d'intégrale, calculer

$$\int_{C_r(0)} \bar{z} dz$$

où $C_r(0)$ est le cercle de rayon $r > 0$ centré à l'origine. Conclure que la fonction $\bar{z}$ n'admet pas une primitive. Remarquer que le résultat dépend de r et en fait il est égal à $2\mathrm{i}$ fois l'aire de $D_r(0)$.

Primitives

4. Si γ est l'arc de courbe de l'équation $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ joignant les points $(1, 1)$ et $(2, 3)$, trouver la valeur de

$$\int_\gamma \left(12z^2 + 4\mathrm{i}z\right) dz.$$

5. Montrer que la fonction holomorphe $f(z) = \frac{1}{z+1}$ définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ n'admet pas de primitive holomorphe sur son domaine de définition. Calculer la primitive de $f(z)$ sur $D_0(1)$ qui vaut 0 en $z = 0$ et l'exprimer en fonction de la determination principal du logarithme.

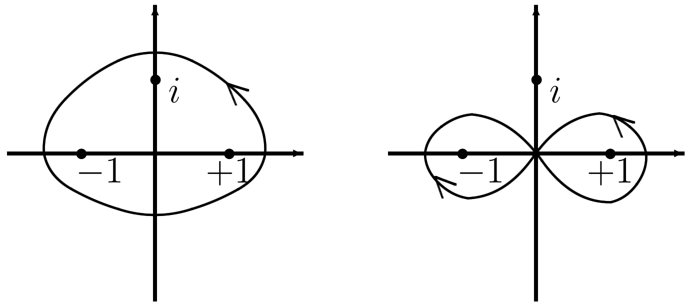
6. Montrer que la fonction $f(z) = z^{-2}$ admet une primitive holomorphe sur son domaine de définition, même s'il n'est pas simplement connexe. Conclure que l'intégrale de $f(z)$ sur le cercle S^1 est zéro. Si on a une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ telle que son intégrale sur S^1 est zéro, peut-on toujours en trouver une primitive holomorphe ?

Formule intégrale de Cauchy

7. Calculer l'integrale

$$\int_\gamma \frac{z^2+1}{(z^2-1)(z-\mathrm{i})} dz$$

en utilisant la formule de Cauchy pour les deux chemins γ suivants :



Est-il possible de déformer le premier chemin en l'autre sans sortir du domaine d'holomorphie de la fonction intégrande ?

8. Calculer l'integrale

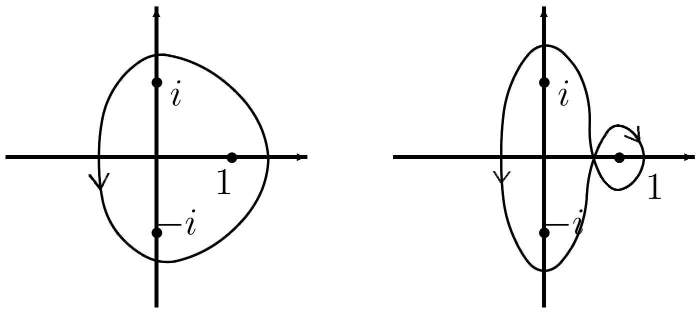
$$\int_\gamma \frac{z}{(z^2-1)(z-\mathrm{i})} dz$$

en utilisant la formule de Cauchy pour les deux chemins γ donnés dans l'exercice précédent.

9. Calculer l'integrale

$$\int_\gamma \frac{z^2}{(z^2+1)(z-1)} dz$$

en utilisant la formule de Cauchy pour les deux chemins γ suivants :



10. Calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_{|z+\mathrm{i}|=3} \frac{\sin(z)}{z+\mathrm{i}} dz$,

b. $\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2+1} dz$,

c. $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1} dz$,

d. $\int_{|z|=4} \frac{\cos(z)}{z^2-\pi^2} dz$,

e. $\int_{|z+1|=1} \frac{1}{(1+z)(z-1)^3} dz$,

f. $\int_{|z-\mathrm{i}|=1} \frac{\cos(z)}{(z-\mathrm{i})^3} dz$.

11. Montrer que la moyenne des valeurs d'une fonction holomorphe sur le bord d'un disque est égale à sa valeur au centre du disque.

12. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{|z|=r} \frac{1}{(z-a)^n(z-b)} dz, \qquad a, b \in \mathbb{C}, \quad |a| < r < |b|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

13. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{\partial D} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$$

pour les domaines suivants :

a. $D = \{|z| < \frac{1}{2}\}$, b. $D = \{|z| < \frac{3}{2}\}$, c. $D = \{|z-1| < \frac{1}{2}\}$.

Séries entières

14. Trouver le rayon de convergence des séries entières suivantes :

a. $\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n, \quad k \in \mathbb{R}$,

b. $\sum_{n=0}^{\infty} (\ln(n+2))^k z^n, \quad k \in \mathbb{R}$,

c. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^\alpha}, \quad \alpha > 0$,

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$,

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(kn)!}{n!(n+1)!\cdots(n+k-1)!} z^n, \quad k \in \mathbb{N}$.

15. La fonction de Bessel de première espèce d'indice 0 est définie par

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(z/2)^{2k}}{(k!)^2}.$$

Déterminer le rayon de convergence de la série. Vérifier que J_0 est une solution de l'équation différentielle

$$z^2 w'' + z w' + z^2 w = 0.$$

16. On sait que la sèrie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-\mathrm{i})^k$ converge pour $z = 4$ et diverge pour $z = -8$. Que sait on au sujet de la convergence ou la divergence des séries suivantes ?

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (1+\mathrm{i})^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k 9^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (-5)^k.$$

Théorème de Taylor

17. On considère la série entière centrée en 0 associée à la fonction $\frac{z^3-1}{z^2+3z-4}$. Quel est le rayon de convergence et pourquoi ?

18. Calculer les premiers trois termes de la série de Taylor à l'origine de la fonction

$$f(z) = e^{\frac{z}{1-z}},$$

et donner son rayon de convergence.

Fonctions entières

19. Soit $f(z)$ une fonction entière telle que $|f(z)| \geqslant 1$ pout tout $z \in \mathbb{C}$. Si $f(0) = 1$ qu'est-ce qu'on peut dire de la fonction f ?

20. Soit $f(z)$ un fonction entière telle que $f(x + 2\pi) = f(x)$ pour tout x réel. Montrer que $f(z + 2\pi) = f(z)$ pour tout z dans $\mathbb{C}$.

21. Soit $f(z)$ une fonction entière telle que $\lim_{z\to+\infty} |f(z)| = +\infty$. Montrer que $f(z)$ est un polynôme.

Principe de prolongement analytique

22. Soit D un domaine symétrique par rapport à l'axe réel. Soit f une fonction holomorphe sur D telle que $f(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in D \cap \mathbb{R}$. Montrer que $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ pour tout $z \in D$.

23. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe sur un voisinage U de l'origine. Montrer que si $f(z) = f(2z)$ pour tous $z, 2z \in U$, alors $f(z)$ est une fonction constante.