1.

a. La fonction $\sin(z)$ est égale à zéro en $z = k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Donc la fonction $f(z) = \frac{z}{\sin(z)}$ est définie sur $\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Puisque les points de $\pi\mathbb{Z}$ sont isolés dans $\mathbb{C}$ ils sont des singularités de f. En $z = 0$ la limite de f existe finie (elle est évidemment égale à un), donc cette singularité est apparente. Dans les autres singularités $z = k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}^*$ on a que $|f(z)|$ tend vers $+\infty$ donc elles sont des pôles. L'ordre de ces pôles est égal à un.

b. Les points $\pi\mathbb{Z}$ sont des singularités. Puisque fonction est périodique de période 2π, il suffit de regarder son comportement en $z = 0$ et $z = \pi$. Pour $z = 0$ la limite existe (égale à $\frac{1}{2}$) donc la singularité est apparente. En $z = \pi$ on a un pôle d'ordre deux.

c. Le point $z = -1$ est une singularité. On peut verifier que la limite pour $z \to -1$ n'existe pas, puisque elle dépend de la direction dans laquelle z se rapproche de -1. Donc la singularité est essentielle.

2. On peut écrire

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

Dans la couronne considérée $|1/z| < 1$, donc, en utilisant la somme de la série géométrique, on trouve

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1}.$$

Dans la même couronne $|z/2| < 1$ donc

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(z/2)^n.$$

On obtient la série de Laurent

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} z^n$$

qui est convergente dans la couronne considérée.

5.

a. L'intégrande $f(z)$ a deux singularités $z = 0$ et $z = 1$ à l'intérieur de $C_2(0)$. En calculant les premiers terms des séries de Laurent dans le voisinage de ces deux points on trouve que

$$\mathrm{Res}_{z=0} f(z) = -1, \qquad \mathrm{Res}_{z=1} f(z) = 1.$$

Donc l'intégrale est zero.

6.

a. La fonction rationnelle

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}$$

a pôles en $z = \pm i$ et en $z = \pm 3i$. On considère le chemin C_r donnée par le segment $[-r, r]$ et par le demi-cercle C'_r paramétré par $z(t) = re^{it}$ pour $t \in [0, \pi]$ et $r > 0$. Le théorème des résidus nous dit que l'intégrale

$$\int_{C_r} f(z)dz$$

est égale à ($2\pi i$ fois) la somme des résidus de $f(z)$ dans le points contenus à l'intérieur du chemin, c'est à dire :

$$2\pi i(\mathrm{Res}_{z=i} f(z) + \mathrm{Res}_{z=3i} f(z)) = 2\pi i(-\frac{1}{16i} + \frac{3}{16i}) = \frac{\pi}{4}.$$

Cette intégrale est égale aussi à la somme de deux intégrales le long du segment $[-r, r]$ et du demi-cercle C'_r. Dans la limite $r \to +\infty$ on a que

$$\int_{[-r,r]} f(z)dz \to \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx,$$

et

$$\int_{C'_r} f(z)dz \to 0, \tag{1}$$

donc on trouve que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Pout montrer (1) il faut remarquer que

$$\left| \int_{C'_r} f(z)dz \right| = \left| \int_0^{\pi} f(re^{it}) rie^{it} dt \right| \leqslant r \int_0^{\pi} \left| f(re^{it}) \right| dt$$

et que $r|f(re^{it})|$ tend vers 0 lorsque r tend vers ∞.

b. $\frac{5\pi}{12}$

c. $\sqrt{2}\pi$

d. $\frac{3\pi}{8}$

7.

a. On considère le chemin C_r donnée par le segment $[-r, r]$ et par le demi-cercle C_r' paramétré par $z(t) = re^{it}$ pour $t \in [0, \pi]$ et $r > 0$. Si on calcul le résidu du intégrande au point $z = 1 + i$ contenu dans le chemin C_r on trouve $\frac{1}{2}e^{i-1}$. Il faut juste montrer que dans la limite $r \to +\infty$ l'intégrale le long du demi-cercle C_r' tend vers zéro. Cela vient de l'inégalité

$$\left| \int_{C_r'} \frac{(z-1)e^{iz}}{z^2 - 2z + 2} dz \right| \leqslant \int_0^\pi r \left| \frac{(re^{it} - 1)}{r^2 e^{2it} - 2re^{it} + 2} \right| \left| \exp(ire^{it}) \right| \, dt,$$

puisque

$$\left| \exp(ire^{it}) \right| = e^{-r \sin t} \to 0$$

et

$$r \left| \frac{(re^{it} - 1)}{r^2 e^{2it} - 2re^{it} + 2} \right| \to 1.$$

L'intégrale donc vaut $\pi i e^{i-1}$.