Séries numériques, L2 MaPC4A, année 2022-2023

13 février 2023

Série de terme général $u_n \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1. A savoir sans hésiter : si $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$,
$$\sum_{k=p}^{q} z^k = \frac{z^p - z^{q+1}}{1-z} \tag{1}$$
et ainsi
$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1-z} \tag{2}$$
2. **Deux notions de convergence** :
   (a) Convergence simple : la suite des sommes partielles $(\sum_{k=0}^{n} u_k)_{n\geq 0}$ converge.
   (b) Convergence absolue : la série associée aux modules des u_n converge (sommes partielles $(\sum_{k=0}^{n} |u_k|)_{n\geq 0}$).
3. La convergence simple entraîne $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Attention, la réciproque est fausse !
4. La convergence absolue entraîne la convergence simple. La réciproque est fausse.
5. La convergence des séries est une notion asymptotique (c'est-à-dire, on regarde ce qui se passe à partir d'un certain rang).
6. **Structure d'espace vectoriel pour l'ensemble des séries convergentes.**
7. **Séries à termes positifs**
   (a) Résultat fondamental : si $0 \leq a_n \leq b_n$ pour n assez grand,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \text{ converge} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ converge} \tag{3}$$
   (b) On a aussi : si $0 \leq a_n \leq b_n$ pour n assez grand,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ diverge} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \text{ diverge} \tag{4}$$
   (c) Si $a_n \sim_{+\infty} b_n$ avec $b_n \geq 0$ pour $n \geq n_0$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$, sont de même nature.
   (d) Règle de **Cauchy** : soit $u_n \geq 0$, avec $\sqrt[n]{u_n} \to l$, si $l < 1$ convergence, $l > 1$ divergence grossière, $l = 1$ cas douteux.

(e) Règle de **d'Alembert** : soit $u_n > 0$, avec $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l$, si $l < 1$ convergence, $l > 1$ divergence grossière, $l = 1$ cas douteux.

(f) « d'Alembert entraîne Cauchy ».

8. **Questions posées en travaux dirigés, en lien avec les exercices 14-15-16-18 de la fiche 2 :**

(a) Compléter :

$$\sum_{k=3}^{8} \frac{1}{5^k} = \cdots \quad ; \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{5^k} = \cdots \tag{5}$$

(b) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{5^k}$?

(c) Nature de la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{2^k}$. On peut appliquer le critère de D'Alembert mais on peut aussi voir que pour k assez grand :

$$\frac{k^2}{2^k} \leq \frac{1}{(1.5)^k} \cdots \tag{6}$$

(d) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{2^k} z^k$?

(e) On doit retenir que la série harmonique $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ diverge et que la série harmonique alternée $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ converge. En déduire, sans faire de calcul, la valeur du rayon de convergence de la série entière $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k}$.