Remarques et complèments aux séances de travaux dirigés du module L2 MaPC4A, année 2022-2023 (work in progress)

groupe Hervé Le Ferrand

21 mars 2023

Sur la première fiche de travaux dirigés

1. **En lien avec l'exercice 4** Un sous-ensemble non vide E de $\mathbb{C}$ est dit *connexe* s'il n'existe pas deux ouverts O_1 et O_2 de $\mathbb{C}$ tels que $E = (E \cap O_1) \cup (E \cap O_2)$ et $E \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$.
   On retiendra que dans $\mathbb{C}$, « ensemble ouvert connexe » équivaut à « ensemble ouvert connexe par arcs ». Un tel ensemble est appelé *domaine*. Parmi les ensembles connexes par arcs, on a les ensembles *étoilés* et les ensembles *convexes*. Dans la théorie des fonctions holomorphes des ouverts convexes et les ouverts étoilés sont des domaines à prendre en considération.
2. **En lien avec l'exercice 5** Soit λ et μ deux nombres complexes, vérifier que l'application $z \mapsto \lambda z$ est $\mathbb{C}$-linéaire. Montrer que l'application $z \mapsto \lambda z + \mu \overline{z}$ est $\mathbb{R}$-linéaire. Est-elle $\mathbb{C}$-linéaire ?
   Dans $\mathbb{R}^2$ muni de son repère canonique, on considère la droite d'équation
   $$\alpha x + \beta y + \gamma = 0 \tag{1}$$
   α, β, γ des réels et $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. En posant $z = x + iy$, donner une expression « complexe » de l'équation de la droite (indication : exprimer x et y en fonction de z et de $\overline{z}$).
   De la même façon, on peut donner une équation « complexe » (faisant intervenir z et $\overline{z}$) du cercle de centre i et de rayon 2.
3. **En lien avec l'exercice 9** Soit z un nombre complexe de module $r > 0$ et d'argument principal $\theta \in]-\pi, \pi[$. Ceci signifie que $z = x + iy$ ne se situe pas sur la demi-droite $\{(x, y) \ / \ x \leq 0, \ y = 0\}$. Etablir que :
   $$\theta = 2 \arctan \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{2}$$
   Indication : partir de $\tan \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} = \dfrac{\cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \cdots$

Si par exemple $z = -1 + i$, on obtient :

$$\theta = 2 \arctan \frac{-1}{1+\sqrt{2}} = 2 \arctan(1-\sqrt{2}) = 2 \times \frac{3\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}. \tag{3}$$

Sinon, on peut voir que l'opposé de z, $1 - i$, a pour argument principal $\arctan(\frac{-1}{1}) = -\frac{\pi}{4}$ donc z a pour argument principal $-\frac{\pi}{4} + \pi$.
Si par exemple $z = -1 - i$, l'opposé de z, $1 + i$, a pour argument principal $\arctan(\frac{1}{1}) = \frac{\pi}{4}$. Ainsi z a pour argument principal $\frac{\pi}{4} - \pi$.

4. **En lien avec l'exercice 10** Dans cet exercice, toutes les équations sont de la forme (ou peuvent se mettre sous) $P(z) = 0$ où P est un polynôme à coefficient complexes. Or, dans $\mathbb{C}$, tout polynôme de degré n admet n racines (ou zéros), éventuellement multiples. Par exemple, l'équation $z^3 = i$ admet 3 racines. On les calculera en utilisant la forme trigonométrique de z. On peut aussi remarquer que cette équation équivaut à $\left(\frac{z}{-i}\right)^3 = 1$. Or les solutions de $u^3 = 1$ sont les racines troisièmes de l'unité...
5. **Dans l'exercice 11**, pour calculer i^n, n entier naturel, on distingue les cas $n = 4p + k$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.
6. **En lien avec l'exercice 12** Soit z un nombre complexe de module strictement inférieur à 1, alors $\lim_{n\to+\infty} z^n = 0$. On peut montrer ce résultat de différentes façons partant de $z = re^{i\theta}$ $0 \leq r < 1$ et $\theta \in [0, 2\pi[$:
   (a) On a
   $$|z|^n = |z|^n = r^n = \exp(n \ln(r)) \tag{4}$$
   et comme $\ln(r) < 0$, on conclut.
   (b) On a
   $$z^n = r^n \cos(n\theta) + ir^n \sin(n\theta) \tag{5}$$
   et les deux suites « partie réelle » et « partie imaginaire » tendent vers 0.

   Par ailleurs, si par exemple $|z| < 1$, la suite $(i + z^n)_n$ tend vers i. Pour montrer cela, on écrit :
   $$|(i + z^n) - i| = |z^n|. \tag{6}$$
7. **En lien avec l'exercice 13** Concernant la fonction $z \mapsto z^2$, faisons les remarques suivantes :
   (a) Si $\Re z > 0$, $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ et donc $z^2 = r^2 e^{2i\theta}$ et on remarque que quand r parcourt $]0, +\infty[$, r^2 parcourt aussi $]0, +\infty[$, et que $-\pi < 2\theta < \pi$. Réciproquement si $w = \rho e^{i\phi}$ avec $\rho > 0$ et $-\pi < \phi < \pi$, il existe un unique z vérifiant à la fois $z^2 = w$ et $\Re z > 0$: c'est $z = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\phi}{2}}$.
   (b) Comment prouver que la fonction $w \mapsto z$ est holomorphe. On pourrait calculer z en fonction de $\Re w$ et de $\Im w$ et vérifier les conditions de Cauchy-Riemann.

Les calculs sont compliqué. Il est préférable d'utiliser les conditions de Cauchy-Riemann avec les coordonnées polaires ρ et ϕ.

Soit $g(z) = g(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$ une fonction holomorphe. Posons $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$, $\tilde{P}(\rho,\phi) = P(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)$ et $\tilde{Q}(\rho,\phi) = Q(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)$. Les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent aussi :

$$\rho\frac{\partial\tilde{P}}{\partial\rho} = \frac{\partial\tilde{Q}}{\partial\phi};\ \rho\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial\rho} = -\frac{\partial\tilde{P}}{\partial\phi}. \tag{7}$$

Dans notre situation, $\tilde{P}(\rho,\phi) = \sqrt{\rho}\cos\frac{\phi}{2}$ et $\tilde{Q}(\rho,\phi) = \sqrt{\rho}\sin\frac{\phi}{2}$

8. **En lien avec l'exercice 14** Au sujet de la transformation de Joukovski, $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $z \neq 0$, faisons les remarques suivantes :

   (a) Si $z \neq 0$, z et $\frac{1}{z}$ ont la même image par f. Ainsi on peut distinguer les deux domaines $|z| < 1$ (disque ouvert) et $|z| > 1$. Si z est de module 1, $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$, on a :
   $$f(e^{i\theta}) = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \cos\theta. \tag{8}$$
   L'image du cercle unité est dons le segment réel $[-1,1]$.

   (b) Pour l'injectivité de f, les domaines d'injectivité sont d'après la remarque ci-dessus sont soit contenus dans le domaine $|z| < 1$, soit dans le domaine $|z| > 1$. On raisonne ensuite en partant de $f(z_1) = f(z_2)$, z_1, z_2 dans un même domaine soit :
   $$z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2} \tag{9}$$
   $$z_1 - z_2 = \frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2} \tag{10}$$
   $$(z_1 - z_2)(1 - \frac{1}{z_1 z_2}) = 0. \tag{11}$$
   Comme on ne peut avoir $z_1 z_2 = 1$, nécessairement $z_1 = z_2$.

   (c) Pour la surjectivité, on regarde l'équation $f(z) = w$ avec w ne se trouvant pas sur le segment $[-1,1]$ (on écarte les w de la forme $\cos\theta$). Cette équation s'écrit :
   $$z^2 - 2wz + 1 = 0. \tag{12}$$
   Elle admet deux solutions distinctes. Or le produit de ces deux solutions vaut 1 donc une solution se trouve dans le domaine $|z| < 1$ et l'autre dans le domaine $|z| > 1$.

   (d) Une autre façon de voir tout cela de façon plus géométrique est de calculer $f(re^{i\theta})$ pour $r > 1$ et $0 \leq \theta < 2\pi$. Les calculs sont donnés dans le polycopié de Hairer-Wanner. On voit alors que les images des cercles de centre l'origine et de rayon $r > 1$ sont des ellipses de plus en plus « grandes » dans le sens que les valeurs des demi-grands axes et demi-petits axes sont croissantes en fonction de r. D'ailleurs quand r devient très grand, ces ellipses sont partiquement des cercles. En quelque sorte ces ellipses « recouvrent » le plan complexe privé du segment $[-1, 1]$.

9. **Dans l'exercice 18**, on aura reconnu au final la fonction $z \mapsto z^4 + iL$ où L est une constante réelle.

10. **En lien avec l'exercice 19**

(a) On considère l'application g de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$g(z) = e^x(\cos y + i \sin y), \ z = x + iy, \ x \in \mathbb{R}, \ y \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Les fonctions $u(x, y) = e^x \cos y$ et $v(x, y) = e^x \sin y$ admettent des dérivées partielles par rapport à x et y qui sont continues sur tout $\mathbb{R}^2$. De plus, on peut vérifier que l'on a bien les conditions de Cauchy-Riemann. La fonction g est donc holomorphe sur tout $\mathbb{C}$. Quelle est sa dérivée ? Calculez $g(z_1 z_2)$. Quelle est l'image d'une droite verticale par cette fonction ? d'une droite horizontale par cette fonction ?

Rappelons en effet que si f est une fonction holomorphe dans un domaine de $\mathbb{C}$ (domaine= ouvert connexe par arcs), et si

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

alors :

$$f'(z) = f'(x + iy) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \tag{14}$$

et ainsi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ ; \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{15}$$

Ce sont les conditions de Cauchy-Riemann. On a une réciproque si $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, si les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ admettent des dérivées partielles continues (sur un domaine) et vérifient les conditions Cauchy-Riemann, alors la fonction $f(z)$ est holomorphe.

(b) On pose $\log z = \ln |z| + i \arg z = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \arctan \frac{y}{x}$ pour z dans le le demi-plan ouvert $\Re z > 0$ $(z = x + iy)$. Cette fonction réalise une bijection de ce demi-plan sur la bande ouverte $-\frac{\pi}{2} < \Im z < \frac{\pi}{2}$.

On applique le rappel ci-dessus à la fonction log sur le demi-plan $\Re z > 0$ pour montrer qu'elle est holomorphe et d'ailleurs on retrouve de plus :

$$\log'(z) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i\frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \tag{16}$$

$$= \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{z}. \tag{17}$$

On fera attention que l'on peut définir la fonction log de différentes façons et que l'on a pas toujours $\log(zz') = \log(z) + \log(z')$! (voir par exemple le polycopié de Hairer-Wanner).

11. **En lien avec l'exercice 21** Soit $f(z) = f(x+iy)$ une fonction holomorphe dans un domaine de $\mathbb{C}$. On a vu que

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} \; ; \; if'(z) = \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{18}$$

et ainsi

$$2f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{19}$$

Si $g(z) = g(x+iy)$, on pose de façon générale :

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x} - i\frac{\partial g}{\partial y}\right). \tag{20}$$

Revenons à notre fonction holomorphe $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. On suppose qu'elle ne s'annule pas. En n'oubliant pas que $u(x,y)$ et $v(x,y)$ vérifient les conditions de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \; ; \; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{21}$$

calculons $\dfrac{\partial |f(z)|}{\partial z} = \dfrac{\partial(\sqrt{u^2+v^2})}{\partial z}$.

On a :

$$\frac{\partial |f(z)|}{\partial x} = \frac{1}{2}(u^2+v^2)^{-\frac{1}{2}}\left(2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{22}$$

et

$$\frac{\partial |f(z)|}{\partial y} = \frac{1}{2}(u^2+v^2)^{-\frac{1}{2}}\left(2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial v}{\partial y}\right). \tag{23}$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial |f(z)|}{\partial x} - i\frac{\partial |f(z)|}{\partial y} &= (u^2+v^2)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right) - i\left(u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] & (24)\\
&= (u^2+v^2)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right) - i\left(u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] & (25)\\
&= (u^2+v^2)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{\partial u}{\partial y}(-v-iu) + \frac{\partial v}{\partial y}(u-iv)\right] & (26)\\
&= (u^2+v^2)^{-\frac{1}{2}}(u-iv)\left[\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right] & (27)\\
&= \frac{\overline{f(z)}}{|f(z)|}f'(z) = |f(z)|\frac{f'(z)}{f(z)}. & (28)
\end{aligned}$$

Sur la seconde fiche de travaux dirigés

1. **En lien avec le calcul d'une intégrale curviligne quand la fonction est primitivable dans un domaine contenant la courbe.** Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine D de $\mathbb{C}$ et $t \mapsto x(t) + iy(t)$ une fonction de la variable réelle t à valeurs dans D de classe C^1 (i.e. continûment dérivable). On pose $z(t) = x(t) + iy(t)$. Pourquoi peut-on bien écrire

$$\frac{d}{dt} f(z(t)) = f'(z(t))z'(t) \ ? \tag{29}$$

Comme $f(z(t)) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))$, d'après la *règle de la chaine* (différentielle d'une fonction composée) on a :

$$\frac{d}{dt} u(x(t), y(t)) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = x'(t)\frac{\partial u}{\partial x} + y'(t)\frac{\partial u}{\partial y} \tag{30}$$

et

$$\frac{d}{dt} v(x(t), y(t)) = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = x'(t)\frac{\partial v}{\partial x} + y'(t)\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{31}$$

Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} f(z(t)) &= \left(x'(t)\frac{\partial u}{\partial x} + y'(t)\frac{\partial u}{\partial y}\right) + i\left(x'(t)\frac{\partial v}{\partial x} + y'(t)\frac{\partial v}{\partial y}\right) && (32)\\
&= x'(t)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) + y'(t)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) && (33)\\
&= x'(t)f'(z) + iy'(t)f'(z) = f'(z)z'(t). && (34)
\end{aligned}$$

2. **En lien avec l'exercice 2** Soit $\gamma(t) = c + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, une paramétrisation du cercle de centre c et de rayon r, on a obtenu en faisant le calcul :

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-c} = 2i\pi. \tag{35}$$

On peut voir aussi ce résultat sous l'angle de la formule intégrale de Cauchy appliquée à la fonction constante égale à 1, $f \equiv 1$:

$$f(c) = 1 = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-c} \tag{36}$$

3. **En lien avec l'exercice 3** Une fonction d'une variable réelle (à valeurs réelles) continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle. Dans le cas des fonctions d'une variable complexe (à valeurs complexes) la seule condition de continuité ne suffit pas pour affirmer qu'une fonction admette une primitive dans un domaine. La fonction $z \mapsto \bar{z}$ en est un bon exemple !

4. **En lien avec l'exercice 4 du partiel de Mars 2022** Le chemin étant défini par $z(t) = te^{it}$, $0 \leq t \leq 1$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \bar{z} dz &= \int_0^1 te^{-it}(e^{it} + ite^{it})dt \\ &= \int_0^1 (t + it^2)dt \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3}i. \end{aligned}$$

On peut aussi présenter les calculs de la façon suivante : si $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, si $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$,

$$\int_\gamma f(z)ds = \int_a^b [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))] [x'(t) + iy'(t)] dt. \tag{37}$$

Sur notre exemple, on a donc, $x(t) = t\cos(t)$ et $y(t) = t\sin(t)$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \bar{z} dz &= \int_{\mathcal{C}} (x - iy)dz \\ &= \int_0^1 (t\cos(t) - it\sin(t) [(\cos(t) - t\sin(t)) + i(\sin(t) + t\cos(t)] dt \\ &= \int_0^1 (t + it^2)dt \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3}i. \end{aligned}$$

5. **En lien avec l'exercice 7, fiche 2** On a décomposé en éléments simples la fraction rationnelle $f(z) = \dfrac{z + i}{(z + 1)(z - 1)}$:

$$\frac{z + i}{(z + 1)(z - 1)} = \frac{A}{(z + 1)} + \frac{B}{(z - 1)} \tag{38}$$

en réduisant au même dénominateur et en simplifiant. On peut aussi procéder de la façon suivante :

$$(z + 1)\frac{z + i}{(z + 1)(z - 1)} = A + (z + 1)\frac{B}{(z - 1)} \tag{39}$$

soit

$$\frac{z + i}{z - 1} = A + (z + 1)\frac{B}{(z - 1)}. \tag{40}$$

On remplace alors z par -1 pour obtenir A. On procède de même pour B.

6. **Question posée au sujet du calcul d'une intégrale généralisée**

(a) Quelle est la valeur de l'intégrale généralisée (réelle) suivante ?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \tag{41}$$

Rappelons que ce type d'intégrale a un sens si les deux intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ convergent.

(b) On considère maintenant dans le domaine complexe la fonction $f : z \mapsto \dfrac{1}{z^2+1}$. Soit R un réel strictement supérieur à 1. Quelle est la valeur de l'intégrale curviligne de f le long du lacet (simple) formé en parcourant le segment $[-R, R]$ puis le demi-cercle $\theta \mapsto Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi[$? (appliquez la formule intégrale de Cauchy à la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{z+i}$ sur ...)

(c) On rappelle que pour a et b complexes :

$$|a| - |b| \leq ||a| - |b|| \leq |a+b|. \tag{42}$$

On rappelle aussi que le module d'une intégrale (en faisant attention aux bornes de l'intégrale) est plus petit que l'intégrale du module. Majorer alors l'intégrale curviligne de f le long du demi-cercle $\theta \mapsto Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi[$.

$$\left| \int_0^{\pi} \frac{iRe^{i\theta} d\theta}{R^2 e^{i2\theta}+1} \right| \leq \int_0^{\pi} \frac{R d\theta}{|R^2 e^{i2\theta}+1|} \tag{43}$$

Or $|R^2 e^{i2\theta} + 1| \geq R^2 - 1$, donc ...

Que se passe-t-il quand $R \to +\infty$? Conclure !

7. **En lien avec les exercices 17 et 18** On remarque tout d'abord que :

$$\frac{z^3-1}{z^2+3z-4} = \frac{(z-1)(z^2+z+1)}{(z-1)(z+4)} = \frac{z^2+z+1}{z+4}. \tag{44}$$

Cette dernière fonction, fraction rationnelle avec un pôle simple en -4, est holomorphe sur $\mathbb{C}$ privé de 4, donc le développement en série entière de la fonction en 0 est 4 (on considère le plus grand disque ouvert contenu dans $\mathbb{C} - \{4\}$). On développe la fonction de la façon suivante :

$$\frac{z^2+z+1}{z+4} = \frac{(z+4)(z-3)+13}{z+4} = z - 3 + \frac{13}{z+4} = z - 3 - \frac{13}{4} \times \frac{1}{1+\frac{z}{4}} \tag{45}$$

Or, si $|z| < 4$, on sait que $\dfrac{1}{1+\frac{z}{4}} = \cdots$

Pour le développement en série entière à l'origine de la fonction $z \mapsto \exp \dfrac{z}{1-z}$, la situation est favorable car la fonction $w(z) = \dfrac{z}{1-z}$ s'annule en 0 et on connaît le développement en série entière de la fonction exp à l'origine (en fait, on procède un peu comme dans le cas de la composée de développements limités). Ainsi pour $|z| < 1$, on a :

$$\exp\frac{z}{1-z} = 1 + w(z) + \frac{w(z)^2}{2} + \frac{w(z)^3}{6} + \cdots \tag{46}$$

$$= 1 + z(1 + z + z^2 + z^3 + \cdots) + \frac{1}{2}z^2(1 + z + z^2 + z^3 + \cdots)^2 \tag{47}$$

$$+\frac{1}{6}z^3(1 + z + z^2 + z^3 + \cdots)^3 + \cdots \tag{48}$$

$$= 1 + z + \frac{3}{2}z^2 + \frac{13}{6}z^3 + \cdots \tag{49}$$

Faisons une petite remarque : le développement en série entière à l'origine de $z \mapsto \dfrac{1}{(1-z)^2}$ s'obtient en dérivant celui de $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$. On peut aussi faire le produit de Cauchy $(1 + z + z^2 + z^3 + \cdots) \times (1 + z + z^2 + z^3 + \cdots)$, i.e. on regroupe les termes de même degré.

En lien avec l'exercice 20 Sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ est continue et dérivable. Le problème se situe en 0 mais on a un développement limité à l'ordre 1 en 0 :

$$f(x) = 0 + 0.x + x(x\sin\frac{1}{x}), \quad \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0. \tag{50}$$

donc $f(0) = f'(0) = 0$. La fonction s'annule pour les réels de la forme $\dfrac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}^\star$. Ainsi quelque soit l'intervalle centré en 0, aussi petit soit-il, il y a toujours des zéros de f dans l'intervalle considéré. Peut-on avoir la même situation dans $\mathbb{C}$? La réponse est non !

Considérons une fonction g holomorphe non identiquement nulle dans un voisinage de 0 (un disque ouvert par exemple) et que $g(0) = 0$. On sait que g admet un développement du type :

$$g(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \tag{51}$$

Soit $k \geq 1$ le plus petit entier tel que $a_k \neq 0$, on a donc :

$$g(z) = a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \cdots = z^k(a_k + a_{k+1}z + \cdots) \tag{52}$$

Comme la fonction entre parenthèses est continue et ne s'annule pas en 0, elle ne s'annule pas dans un voisinage de 0. Ainsi g n'a pas d'autres zéros (que 0) dans un voisinage de 0. C'est le *principe des zéros isolés*.

Soit f une fonction entière (holomorphe sur tout $\mathbb{C}$) nulle au voisinage de 0. Que peut-on dire de f ? (le résultat peut être prové de différentes façons).

Sur la troisième fiche de travaux dirigés

1. **En lien avec différents exercices**

   Au sujet de la trigonométrie avec les nombres complexes, faisons quelques rappels. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \tag{53}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}. \tag{54}$$

   Les formules d'additions sont toujours valables. Pour les retrouver, on peut partir de :

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z \tag{55}$$

   et

$$e^{i(w+z)} = e^{iw} e^{iz}. \tag{56}$$

   On remarquera que cos et sin ne sont pas bornées sur $\mathbb{C}$.

   De plus, comment trouve-t-on tous les zéros complexes de cos ? On a $\cos z = 0$ si et seulement si $e^{iz} + e^{-iz} = 0$, soit $e^{iz} = -e^{-iz}$ ou encore $e^{2iz} = -1$. Posons $z = x + iy$, x et y réels. On a $e^{2iz} = e^{-2y+2ix} = e^{-2y} e^{2ix}$. On arrive ainsi à l'équation :

$$e^{-2y} e^{2ix} = e^{i\pi}. \tag{57}$$

   Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont le même module et le même argument modulo 2π, soit $e^{-2y} = 1$ et $2x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et donc $y = 0$ (z est réel) et $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. **En lien avec les série de Laurent** La fraction rationnelle $f : z \mapsto \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ est holomorphe dans les trois couronnes $V_1 = \{0 < |z| < 1\}$, $V_2 = \{1 < |z| < 2\}$ et $V_3 = \{2 < |z| < \infty\}$. Elle est donc développable en série de Laurent dans chacune des trois couronnes. On commence par écrire :

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}. \tag{58}$$

   Sur V_1, on a en fait un développement en série entière :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n. \tag{59}$$

   Sur V_2, on écrit :

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^n} \tag{60}$$

d'où
$$f(z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}. \tag{61}$$
Sur V_3, on a :
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1\right) z^n. \tag{62}$$

3. **En lien avec les série de Laurent et les résidus** Si z_0 est un point singulier isolé d'une fonction f, c'est-à-dire que f est holomorphe sur une couronne du type $0 < |z - z_0| < \rho$, le résidu de f en z_0 est le coefficient de $(z - z_0)^{-1}$ dans le développement en série de Laurent au voisinage de z_0. La fraction rationnelle $f : z \mapsto \dfrac{1}{z^2+1}$ admet deux points singuliers i et $-i$ qui sont des pôles simples. Il y a plusieurs façons de calculer le résidu en i de f. Posons $z = i + t$, t tend vers 0 :
$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{t(2i+t)} = \frac{1}{2it(1+\frac{t}{2i})} \tag{63}$$
$$= \frac{1}{2i}(1 - \frac{t}{2i} + \left(\frac{t}{2i}\right) - \cdots) \tag{64}$$
Le résidu vaut donc $\dfrac{1}{2i}$.
Calculons le résidu en i de la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{(z^2+1)^3}$:
$$\frac{1}{(z^2+1)^3} = \frac{1}{t^3(2i+t)^3} = -\frac{1}{8it^3}(1 + \frac{t}{2i})^{-3}. \tag{65}$$
Or au voisinage de 0, on a en dérivant plusieurs fois :
$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - \cdots \tag{66}$$
$$-\frac{1}{(1+u)^2} = -1 + 2u - 3u^2 + 4u^3 - \cdots \tag{67}$$
$$\frac{2}{(1+u)^3} = 2 - 6u + 12u^2 - \cdots \tag{68}$$
d'où
$$\frac{1}{(z^2+1)^3} = -\frac{1}{8it^3}(1 - \frac{3t}{2i} + 6\frac{t^2}{-4} \cdots) \tag{69}$$
Le résidu cherché est donc $\dfrac{3}{16i}$.
On obtient de plus (voir les exemples déjà traités) :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = 2i\pi \times \text{résidu en } i = \frac{3\pi}{8}. \tag{70}$$

4. **En lien avec le théorème des résidus** Soit à trouver la valeur de l'intégrale curviligne (le cercle est parcouru une seule fois dans le sens trigonométrique) :

$$\int_{|z|=2} \frac{\cos z}{(z-i)^2} dz. \tag{71}$$

On peut évaluer cette intégrale par deux méthodes :

(a) Par la formule intégrale de Cauchy dans le cas d'une dérivée :

$$f'(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)} dz \tag{72}$$

avec ici $f(z) = \cos z$, $z_0 = i$ et γ notre cercle.

(b) Par la formule des résidus appliquée à la fonction $z \mapsto \dfrac{\cos z}{(z-i)^2}$ et à la singularité i (qui se trouve à l'intérieur du cercle). Cette singularité est un pôle double. En effet $\cos z$ est analytique en i donc :

$$\begin{aligned} \frac{\cos z}{(z-i)^2} &= \frac{\cos(i) - \sin(i)(z-i) - \frac{\cos(i)}{2}(z-i)^2 + \cdots}{(z-i)^2} & (73)\\ &= \frac{\cos(i)}{(z-i)^2} - \frac{\sin(i)}{z-i} + \text{une série de Taylor} & (74) \end{aligned}$$

On s'assure que $\cos(i) \neq 0$. L'intégrale cherchée est égale à $2i\pi$ mutiplié par le résidu de $z \mapsto \dfrac{\cos z}{(z-i)^2}$ en i qui vaut $-\sin(i)$.

5. **En lien avec l'exercice 8** On a calculé l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ en utilisant une intégrale curviligne (dans le domaine complexe) de la fonction $f : z \mapsto \dfrac{1}{z^2+1}$. Pour pouvoir conclure, nous avons dû faire un passage à la limite. Pourrait-on procéder de façon similaire pour calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx \ ? \tag{75}$$

On aurait envie de considérer dans le domaine complexe la fonction $z \mapsto \dfrac{\cos z}{z^2+1}$. Le problème est que la fonction cos n'est pas bornée sur le demi-plan $\Im z \geq 0$! On considère alors la $z \mapsto \dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$ car $z \mapsto e^{iz}$ est bornée sur sur le demi-plan $\Im z \geq 0$ et que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx = \Re\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx\right). \tag{76}$$

6. **En lien avec l'exercice 6** Considérons l'intégrale généralisée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} dx. \tag{77}$$

La fonction sous le signe intégral est une fraction rationnelle du type $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ vérifiant la condition favorable $\deg P(x) \leq \deg Q(x) - 2$.

Dans le domaine complexe, la fonction $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ présente quatre singularités : i, $-i$, $3i$ et $-3i$. Ce sont des pôles simples. En effet, par exemple pour i, on a :

$$\frac{z^2 - z + 2}{z^4 + 10z^2 + 9} = \frac{1}{z - i} \times \frac{z^2 - z + 2}{(z + i)(z - 3i)(z + 3i)}. \tag{78}$$

Or la fonction $z \mapsto \dfrac{z^2 - z + 2}{(z + i)(z - 3i)(z + 3i)}$ est analytique au voisinage de i, donc est de la forme $\alpha_0 + \alpha_1(z - i) + \alpha_2(z - i)^2 + \cdots$, d'où :

$$\frac{z^2 - z + 2}{z^4 + 10z^2 + 9} = \frac{\alpha_0}{z - i} + \alpha_1 + \alpha_2(z - i) + \cdots \tag{79}$$

On s'assure que $\alpha_0 = \dfrac{i^2 - i + 2}{(i + i)(i - 3i)(i + 3i)} \neq 0$. Le résidu de $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ en i est α_0. Faisons une remarque importante, uniquement valable pour un pôle simple. On a :

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z)}{(z - i)Q_1(z)}. \tag{80}$$

Le résidu en i vaut $\dfrac{P(i)}{Q_1(i)}$. Or on a :

$$Q_1(z) = \frac{Q(z)}{z - i} = \frac{Q(z) - Q(i)}{z - i} \tag{81}$$

donc en faisant tendre z vers i, on obtient $Q_1(i) = Q'(i)$. Pour le pôle simple i, le résidu vaut $\dfrac{P(i)}{Q'(i)}$.

7. On a calculer des intégrales généralisées du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Qu'en est-il des intégrales du type $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$? Pour l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + x^2)^2}dx$, il n'y a pas de problème car la fonction sous le signe intégral est paire dont l'intégrale vaut la moitié de l'intégrale de $-\infty$ à $+\infty$. Ce n'est pas du tout le cas pour $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9}dx$. Il faudrait utiliser dans $\mathbb{C}$ un autre contour que le segment $[-0, R]$, suivi du quart de cercle puis du segment vertical $[iR, 0]$.
8. **En lien avec l'exercice 5** Evaluons les intégrales :

$$\int_{|z|=1} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz \; ; \; \int_{|z-2|=1} \frac{1}{z(z - 2)^4}dz. \tag{82}$$

Pour la première, il y a une singularité à l'intérieur du lacet, à savoir 0. On a le développement en série de Laurent :

$$z^2(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \cdots) = \cdots + \frac{1}{5!z^3} + \frac{-\frac{1}{6}}{z} \tag{83}$$

Le résidu de la fonction $z \mapsto z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ en 0 vaut $-\frac{1}{6}$ et donc l'intégrale vaut $-\frac{i\pi}{3}$.
Pour la seconde, la seule singularité à considérer est 2 qui est un pôle d'ordre 4. On développe $\frac{1}{z}$ en série entière au voisinage de 2 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{2+(z-2)} && (84)\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-2}{2}} && (85)\\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z-2}{2} + \frac{(z-2)^2}{4} - \frac{(z-2)^3}{8} + \frac{(z-2)^4}{16} - \cdot\right). && (86) \end{aligned}$$

Ainsi au voisinage de 2 (en fait pour $0 < |z-2| < 2$), on a le développement de Laurent :

$$\frac{1}{z(z-2)^4} = \frac{1}{2(z-2)^4} - \frac{1}{4(z-2)^3} + \frac{1}{8(z-2)^2} - \frac{1}{16(z-2)} + \frac{1}{32} - \cdots \tag{87}$$

Le résidu en 2 de $z \mapsto \frac{1}{z(z-2)^4}$ est $\frac{-1}{16}$ donc l'intégrale vaut $\frac{-i\pi}{8}$. On pouvait aussi calculer cette intégrale en utilisant la formule intégrale de Cauchy pour la dérivée d'ordre 3 de $z \mapsto \frac{1}{z}$ en 2.