Plan complexe

1. Trouver la partie réelle et imaginaire des nombres complexes suivants :

a. $\frac{1}{1-\mathrm{i}}$,

b. $\left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^3$,

c. $\left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$,

d. $\left(\frac{\mathrm{i}^5+2}{\mathrm{i}^{19}+1}\right)^2$,

e. $\frac{(1+\mathrm{i})^5}{(1-\mathrm{i})^3}$.

2. Trouver module et argument des nombres complexes suivants :

a. i,

b. -3,

c. $1 + \mathrm{i}^{123}$,

d. $-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$,

e. $\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$,

f. $-\cos\frac{\pi}{7} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{7}$,

g. $(-4 + 3\mathrm{i})^3$,

h. $(1+\mathrm{i})^8(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^{-6}$.

3. Faire le dessin des sous-ensembles du plan complexe $\mathbb{C}$ suivants :

a. $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$,

b. $\{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(z)| \geqslant 1\}$,

c. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant \sqrt{2}\}$,

d. $\{z \mid |\mathrm{Re}(z)| \geqslant 1\} \cap \{z \mid |z| \leqslant \sqrt{2}\}$,

e. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - \mathrm{i}| = 1\}$,

f. $\{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{\pi}{4}\}$,

g. $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \leqslant 1\}$,

h. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - \mathrm{i}| < 1\}$,

i. $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg(z) < \frac{\pi}{4}\}$.

4. Lesquels des ensembles de l'exercice précédent sont ouverts, fermés, bornés, compacts, connexes ?

5. Une rotation $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ d'un angle θ autour de l'origine du plan est une application linéaire représentée par

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto R(v) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Montrer que la multiplication complexe par $e^{\mathrm{i}\theta}$ d'un nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ correspond à une rotation du vecteur réel v d'un angle θ.

6. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Prouver que :

a. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,
b. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$,
c. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$,
d. $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$,
e. $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$,
f. $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$,
g. $(x + \mathrm{i}y)^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2+y^2}$.

7. Soit $z \neq \pm 1$ un nombre complexe de module unité. Déterminer l'argument de

$$\frac{z-1}{z+1}.$$

8. À partir de l'inégalité triangulaire, prouver que pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\max(|\mathrm{Re}(z)|, |\mathrm{Im}(z)|) \leqslant |z| \leqslant |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|.$$

9. Montrer que pour $\mathrm{Re}(z) > 0$ on a que $\mathrm{Arg}(z) = \arctan(\frac{y}{x})$.

10. Trouver toutes les solutions complexes des équations suivantes :

a. $z^3 = i$,
b. $z^8 = 1$,
c. $z^5 - 1 = \mathrm{i}$,
d. $(z-1)^3 - 1 = 0$,
e. $z^2 + 6z + 10 = 0$,
f. $z^2 + (1+4\mathrm{i})z - (5+\mathrm{i}) = 0$,
g. $z^2 = 3 + 4i$,
h. $z^2 = -5 + 12i$,
i. $1 + e^z = 0$.

11. Calculer les limites suivantes :

a. $\lim_{n\to+\infty} \frac{n\ \mathrm{i}^n}{n+1}$,
b. $\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^n$.

12. En utilisant l'exercice 8, montrer que la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers z si et seulement si les suites réelles $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$, respectivement.

Fonctions complexes

13. On considère la fonction complexe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donnée par $f(z) = z^2$.

a. Trouver l'image de la droite $\mathrm{Im}(z) = 0$.
b. Trouver l'image de la droite $\mathrm{Re}(z) = a$, pour un nombre réel fixé a.
c. En utilisant les coordonnées polaires, trouver l'image des demi-droites et des cercles centrés à l'origine.
d. La fonction f est injective ? Surjective ?
e. Montrer que f est une bijection entre $\mathbb{C}^+$ et $\mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$, où $\mathbb{C}^+$ est le demi-plan

$$\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}.$$

14. Soit $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ l'extérieur du cercle unité. Montrer que la fonction

$$f : E \to \mathbb{C} \setminus [-1,1], \qquad z \mapsto f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

est bijective.

Équations de Cauchy-Riemann

15. En utilisant les équations de Cauchy-Riemann, montrer que la fonction $f(z) = z^2$ est holomorphe.

16. En utilisant les équations de Cauchy-Riemann, montrer que la fonction $f(z) = \bar{z}$ n'est pas holomorphe.

17. Déterminer les conditions sur les constantes réelles a, b, c et d qui rendent la fonction

$$z = x + \mathrm{i}y \quad \mapsto \quad f(z) = ax + by + \mathrm{i}(cx + dy)$$

holomorphe.

18. Soit $u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$. Trouver toutes les fonctions $v(x,y)$ telle que la fonction $z = x + \mathrm{i}y \mapsto f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ est holomorphe.

19. Montrer que la fonction

$$\log(z) := \log|z| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}(z)$$

est holomorphe pour $\mathrm{Re}(z) > 0$.

20. Calculer $\frac{\partial}{\partial z}$ and $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ pour les fonctions suivantes :

a. $|z|$,

b. $(z-a)^p$, $a \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{Z}$,

c. $|z-a|^p$, $a \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{Z}$.

21. Étant donnée une fonction holomorphe $f(z)$, montrer que :

a. $\frac{\partial}{\partial z}|f(z)| = \frac{1}{2}|f(z)|\frac{f'(z)}{f(z)}$,

b. $\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{Re}(f(z)) = \frac{1}{2}f'(z)$,

c. $\frac{\partial}{\partial z}\,\mathrm{Im}(f(z)) = \frac{1}{2\mathrm{i}}f'(z)$.

22. Montrer que les fonctions des exercices 13 et 14 sont biholomorphes (entre des ensembles à spécifier).