

Séries numériques, L2 MaPC4A, année 2023-2024

7 janvier 2024

Série de terme général $u_n \in \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}

1. **A savoir sans hésiter** : si $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$,

$$\sum_{k=p}^q z^k = \frac{z^p - z^{q+1}}{1 - z} \quad (1)$$

et ainsi

$$\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad (2)$$

2. **Deux notions de convergence** :

- (a) **Convergence simple** : la suite des sommes partielles $(\sum_{k=0}^n u_k)_{n \geq 0}$ converge.
 - (b) **Convergence absolue** : la série associée aux modules des u_n converge (sommes partielles $(\sum_{k=0}^n |u_k|)_{n \geq 0}$).
3. La convergence simple entraîne $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. **Attention, la réciproque est fautive !**
4. La convergence absolue entraîne la convergence simple. La réciproque est fautive.
5. La convergence des séries est une notion asymptotique (c'est-à-dire, on regarde ce qui se passe à partir d'un certain rang).
6. **Structure d'espace vectoriel pour l'ensemble des séries convergentes.**
7. **Séries à termes positifs**

- (a) **Résultat fondamental** : si $0 \leq a_n \leq b_n$ pour n assez grand,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \text{ converge} \implies \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ converge} \quad (3)$$

- (b) On a aussi : si $0 \leq a_n \leq b_n$ pour n assez grand,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ diverge} \implies \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \text{ diverge} \quad (4)$$

- (c) Si $a_n \sim_{+\infty} b_n$ avec $b_n \geq 0$ pour $n \geq n_0$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$, sont de même nature.
- (d) **Règle de Cauchy** : soit $u_n \geq 0$, avec $\sqrt[n]{u_n} \rightarrow l$, si $l < 1$ convergence, $l > 1$ divergence grossière, $l = 1$ cas douteux.

(e) **Règle de d'Alembert** : soit $u_n > 0$, avec $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow l$, si $l < 1$ convergence, $l > 1$ divergence grossière, $l = 1$ cas douteux.

(f) « d'Alembert entraîne Cauchy ».

8. **Questions posées en travaux dirigés, en lien avec les exercices 14-15-16-18 de la fiche 2 :**

(a) Compléter :

$$\sum_{k=3}^8 \frac{1}{5^k} = \dots \quad ; \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{5^k} = \dots \quad (5)$$

(b) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{5^k}$?

(c) Nature de la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{2^k}$. On peut appliquer le critère de D'Alembert mais on peut aussi voir que pour k assez grand :

$$\frac{k^2}{2^k} \leq \frac{1}{(1.5)^k} \dots \quad (6)$$

(d) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{2^k} z^k$?

(e) On doit retenir que la série harmonique $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ diverge et que la série harmonique alternée

$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ converge. En déduire, sans faire de calcul, la valeur du rayon de convergence de

la série entière $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k}$.

(f) On doit savoir que la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ converge (voir les séries de Riemann). En effet, on majore le terme général par un terme « télescopique » :

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}. \quad (7)$$