Université de Bourgogne, U.F.R. des Sciences et Techniques, année 2018-2019.
L2, Mathématiques pour la Physique et la Chimie IV - MaPC4A.

Contrôle continu du 1 mars 2019, 10h15-12h15.

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. Dessiner les sous-ensembles suivants du plan complexe $\mathbb{C}$:

a. $\{z \in \mathbb{C} \big| \operatorname{Im}(z) < 1\}$

b. $\{z \in \mathbb{C} \big| |z - i| < 3\}$

c. $\{z \in \mathbb{C} \big| \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Re}(z) = 1\}$

d. $\{z \in \mathbb{C} \big| |\arg(z - 1)| < \frac{\pi}{4}\}$

2. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe. Calculer

$$\frac{\partial \operatorname{Im} f(z)}{\partial z}, \qquad \frac{\partial \operatorname{Im} f(z)}{\partial \bar{z}}.$$

Solution :

$$\operatorname{Im} f(z) = \frac{1}{2i}(f(z) - \overline{f(z)})$$

$$\frac{\partial \overline{f(z)}}{\partial z} = \overline{\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}} = 0$$

$$\frac{\partial \overline{f(z)}}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial f(z)}{\partial z}} = \overline{f'(z)}$$

$$\frac{\partial \operatorname{Im} f(z)}{\partial z} = \frac{1}{2i} f'(z), \qquad \frac{\partial \operatorname{Im} f(z)}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2i}\overline{f'(z)}.$$

3. Soit $\mathcal{C}$ le chemin paramétré par la fonction $z(t) = 2e^{it}$ avec $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. En utilisant la définition de l'intégrale complexe calculer

$$\int_{\mathcal{C}} \operatorname{Re}(z) dz.$$

Solution :

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(t) 2ie^{it} dt \tag{1}$$

$$= 2i \int (e^{2it} + 1) dt \tag{2}$$

$$= [e^{2it} + 2it]_0^{\frac{\pi}{2}} \tag{3}$$

$$= \pi i - 2. \tag{4}$$

4. On considère l'intégrale suivante :

$$A = \int_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z(z-1)} dz.$$

En utilisant les théorèmes de Cauchy répondez aux questions suivantes :

a. Quelle est la valeur de A si le chemin $\mathcal{C}$ est le cercle de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2}$ parcouru dans le sens positif ?

b. Quelle est la valeur de A si le chemin $\mathcal{C}$ est le cercle de centre 0 et de rayon 2 parcouru dans le sens positif ?

Solution :

$$= \int_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z-1} dz - \int_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z} dz \tag{5}$$

la première intégrale est égale à $2\pi i e$ si $\mathcal{C}$ contient 1, la deuxième est égale à $2\pi i$ si $\mathcal{C}$ contient 0. Donc dans le cas (a) le résultat est $-2\pi i$ et dans le cas (b) le résultat est $2\pi i(e-1)$.

5. Trouver le rayon de convergence de la série entière centrée en 0 suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n)^2 z^n.$$

Solution :

$$\lim \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim \left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)} \right)^2 = 1. \tag{6}$$

6. Quel est le rayon de convergence de la série entière centrée en 1 qui représente la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$. Expliquer votre réponse.

Solution : Le disque $D(1,1)$ est contenu dans le domaine de la fonction holomorphique $f(z)$ donc sa série entière y est convergente. Cette série ne peut pas converger dans un disque $D(1,R)$ avec $R > 1$ puisque $f(z)$ n'est pas holomorphique en $z = 0$. Donc le rayon de convergence est $R = 1$.