Examen du 7 mai 2019, 14h-16h, session 1.

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. Dessiner les sous-ensembles suivants du plan complexe $\mathbb{C}$:

a. $\{z \in \mathbb{C} \big| \operatorname{Im}(z) > \operatorname{Re}(z)\}$

b. $\{z \in \mathbb{C} \big| |z+1+i| < \sqrt{2}\}$

c. $\{z \in \mathbb{C} \big| |\arg(z)| \leqslant \frac{\pi}{4}\} \cap \{z \in \mathbb{C} \big| \operatorname{Re}(z) \leqslant 1\}$

d. $\{z \in \mathbb{C} \big| |z-1| = |z+1|\}$

2. Trouver le rayon de convergence de la série entière centrée en 0 suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 (2z)^n.$$

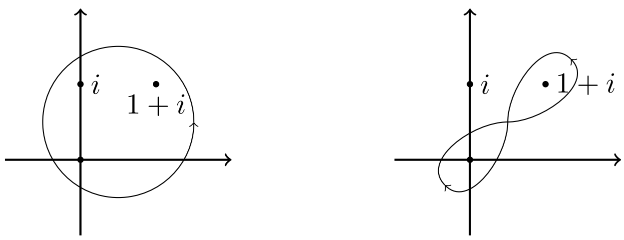
Solution :

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3 2^n}{(n+1)^3 2^{n+1}} = \frac{1}{2} \lim(1+\frac{1}{n})^{-3} = \frac{1}{2}$$

3. Calculer l'intégrale de chemin

$$\int_\gamma \frac{(z+1)^2}{z(z-i)(z-1-i)} dz$$

en utilisant la formule de Cauchy pour les deux chemins γ suivants :



Solution : Soit γ_w un petit cercle autour de w. On a

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_0} \frac{g(z)}{z} dz = 2\pi i g(0) = 2\pi i \frac{1}{i(1+i)},$$

$$\int_{\gamma_i} f(z)dz = \int_{\gamma_i} \frac{h(z)}{z-i} dz = 2\pi i h(i) = 2\pi i \frac{(1+i)^2}{-i},$$

$$\int_{\gamma_{1+i}} f(z)dz = \int_{\gamma_{i+1}} \frac{k(z)}{z-1-i}dz = 2\pi i k(i+1) = 2\pi i \frac{(2+i)^2}{(1+i)}.$$

La première intégrale est donnée par la somme des trois valeurs, la deuxième par la différence entre la deuxième et la troisième valeur.

4. Déterminer la nature de tous les points singuliers de la fonction :

$$f(z) = \frac{z}{(2\sin(z)-1)^2}.$$

Solution : Les points singuliers sont donnés par les solutions de l'équation $\sin z = \frac{1}{2}$, c.-à-d. $\rho^2 - i\rho - 1 = 0$ pour $\rho = e^{iz}$. Donc $\rho = \frac{i\pm\sqrt{3}}{2}$. Puisque $|\rho| = 1$, on a que $z = x \in \mathbb{R}$ et $\sin x = \frac{1}{2}$, finalement $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

Soit $\zeta = z - (\frac{\pi}{6} + 2\pi k) \sim 0$, on a que

$$\sin z = \sin(\zeta + (\frac{\pi}{6} + 2\pi k)) = \sin(\zeta + \frac{\pi}{6}) \sim \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta + \dots$$

donc $2\sin(z) - 1 \sim \sqrt{2}\zeta + \dots$ et

$$f(z) \sim \frac{\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{2\zeta^2} + \dots.$$

Donc $f(z)$ a un pôle de degré 2 en $z = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, pour tous $k \in \mathbb{Z}$.

Dans la même façon, on trouve que $f(z)$ a un pôle d'ordre 2 en $z = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, pour tous $k \in \mathbb{Z}$.

5. Calculer, en utilisant le théorème des résidus, l'intégrale suivante :

$$\int_{|z|=2} \frac{\cos(z)}{(z-i)^2}dz.$$

Solution :

$$= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{\cos(z)}{(z-i)^2} = -2\pi i \sin(i)$$

6. Calculer l'intégrale réelle suivante en utilisant les méthodes de l'analyse complexe :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9}dx.$$

Solution :

$$= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} f(z) + 2\pi i \operatorname{Res}_{z=3i} f(z) = 2\pi i(-\frac{1+i}{16} + \frac{1}{16} - \frac{7i}{48}) = \frac{5}{12}\pi$$