1 Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Version préliminaire des notes du cours "Mathématiques pour l'Électronique et l'Informatique II", troisème partie, par G. Carlet.

Définition des espaces $\mathbb{R}^n$,
somme de deux vecteurs, produit d'un vecteur par un scalaire, vecteur nul, opposé.
Vecteur colonne, ligne, produit scalaire.

Exercice 1. *Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, calculer les vecteurs suivantes*

$$a+b+c, \quad 2a-b+c, \quad -a+2b, \quad \alpha a+\beta b+\gamma c,$$

formés à partir des vecteur

$$a = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Résoudre les équations suivantes

$$x+a=b, \qquad 2x-3b=c, \qquad c+x=a-2c,$$

pour $x \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 2. *Soient u, v, w des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrer que toutes les propriétés suivantes (qui dans le cadre général définissent ce qu'est un espace vectoriel) sont vérifiées. Faire une dessin pour chacune des 8 propriétés dans le cas de $\mathbb{R}^2$.*

1. $u+v=v+u$
2. $u+(v+w)=(u+v)+w$
3. $u+0=0+u=u$
4. $u+(-u)=0$
5. $1 \cdot u = u$
6. $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$
7. $\lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
8. $(\lambda+\mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$

Exercice 3. *Soit $u \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\langle u|u \rangle = 0$ si et seulement si $u = 0$.*

Exercice 4. *On a jusqu'ici considéré l'espace vectoriel des vecteurs colonne $\mathbb{R}^n$. En général un espace vectoriel (à coefficients réels) est un ensemble V avec :*

1. *une opération de somme $+$ de deux vecteurs de V ,*
2. *et un operation de multiplication des vecteurs de V par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$,*

telles que les propriétés de l'exercice 2 sont vérifiées. Vérifier que les ensembles suivantes sont des espaces vectoriels :

1. *L'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$;*
2. *L'espace des suites réelles : $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$;*
3. *L'espace des matrices à n lignes et p colonnes : $M_{n,p}(\mathbb{R})$.*

Montrer que l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ n'est pas un espace vectoriel.

2 Applications linéaires

Définition d'application linéaire, de matrice associée.
Exemples : réflexions, rotations, homothéties, projections orthogonales.
Composition des applications linéaires et produit de matrices.
Application linéaire bijective et matrice inversible.

Exercice 5. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ *et soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *l'application linéaire associée.*
Calculer et dessiner l'image par f *de* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Dessiner l'image par* f *du carré de sommets* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. *Parmi les applications suivantes de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$, *indiquer lesquelles sont linéaires. Écrire les matrices associées.*

1. $(x_1, x_2) \mapsto (3x_1 - x_2 + 1, -x_1 + 2x_2)$,
2. $(x_1, x_2) \mapsto (3x_1 + x_2^2, -x_1)$,
3. $(x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1)$,
4. $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_2)$,
5. $(x_1, x_2) \mapsto (2x_1, x_2)$.

Exercice 7. *Écrire l'application linéaire donnée par la réflexion par rapport à l'axe des ordonnées du plan. Écrire la matrice associée.*

Exercice 8. *Dans l'espace* $\mathbb{R}^3$, *écrire l'application linéaire* f *donnée par l'homothétie de rapport* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Pour quelles valeurs de* λ *est-elle inversible ? Écrire les matrices associées à* f *et à son inverse.*

Exercice 9. *Écrire la matrice de la rotation du plan d'angle* $\frac{\pi}{4}$ *centrée à l'origine. Écrire la matrice de la rotation de l'espace d'angle* $\frac{\pi}{4}$ *d'axe* (Ox). *Généraliser au cas d'une rotation d'angle* θ. *Écrire la matrice inverse.*

Exercice 10. *Écrire la matrice de la réflexion du plan par rapport à la doite* $y = -x$. *Écrire la matrice de la réflexion de l'espace par rapport au plan* $y = -x$.

Exercice 11. *Écrire la matrice de la projection orthogonale de l'espace sur l'axe* (Oy). *Montrer que elle n'est pas inversible.*

Exercice 12. *Soit* T *l'application linéaire de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *définie par*

$$T : (x_1, x_2) \mapsto (-3x_1 + x_2, x_1 - x_2),$$

et U *définie par*

$$U : (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_1).$$

Expliciter $2T$, $T - U$, T^2, TU, UT. *A-t-on* $UT = TU$ *?*

Exercice 13. *Montrer que l'application linéaire* $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)$ *est bijective et trouver l'application inverse, en écrivant la matrice associée inverse.*

Exercice 14. *Existe-t-il une application linéaire* $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ *telle que*

$$T(0,1,1,1) = (2,0), \quad T(1,2,1,1) = (1,2), \quad T(1,1,1,2) = (3,1), \quad T(2,1,0,1) = (2,3) \quad ?$$

3 *Sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^n$

Combinaison linéaire,
définition de sous-espace vectoriel,
sous-espace vectoriel engendré par un famille de vecteurs,
dépendance et indépendance linéaire,
base et dimension.
Comment trouver une base d'un sous-espace.
Le rang d'une famille de vecteurs.

Exercice 15. *Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^n$, lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?*

— *l'ensemble des vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que $x_1 = 1$;*
— *l'ensemble des vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que $x_1 = 0$;*
— *l'ensemble des vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que $x_1 + 2x_2 = 0$;*
— *l'ensemble des vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = 1$;*
— *l'ensemble des vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que $\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n = 0$ où $\mu_1, \ldots, \mu_n$ sont des réels fixés ;*
— *l'ensemble des vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que $\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n = 1$ où $\mu_1, \ldots, \mu_n$ sont des réels fixés ;*
— *l'ensemble des vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que $x_1^2 = x_2$.*

Exercice 16. *Soit $S \subset \mathbb{R}^5$ l'ensemble des solutions du système linéaire homogène*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases} .$$

Montrer que S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$. Écrire des générateurs pour S.

Exercice 17. *Dans $\mathbb{R}^3$ on considère l'ensemble des vecteurs S vérifiant*

$$x + 2y - z = 0.$$

Montrer que S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et écrire des générateurs pour S.

Exercice 18. *Soit S l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminez trois constantes a, b, c telles que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S \text{ si et seulement si } ax + by + cz = 0.$$

Exercice 19. *On considère les deux ensembles S_1 et S_2 de $\mathbb{R}^3$ définis par les équations suivantes :*

$$S_1 : x - y - z = 0,$$
$$S_2 : 2x - y + z = 0.$$

Déterminez l'intersection $S_1 \cap S_2$.

Exercice 20. *On travaille dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Dans les cas suivantes indiquer si les vecteurs sont linéairement indépendantes ou non :*

1. $(1, 1)$, $(2, 1)$;
2. $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$;
3. $(1, 0)$, $(0, 1)$;
4. $(1, 0)$, $(0, 1)$, (a, b) ;
5. $(1, 1, 2)$, $(3, 1, 2)$, $(-1, 0, 0)$;
6. $(3, -1, 1)$, $(4, 1, 0)$, $(-2, -2, -2)$;
7. $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$.

Exercice 21. *Soit $S \subset \mathbb{R}^4$ l'espace des solutions de l'équation*

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Déterminer une base de S.

Exercice 22. *Soit $S \subset \mathbb{R}^4$ l'espace des solutions de l'équation*

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

Déterminer une base de S.

Exercice 23. *Soit S le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1, 0, 1)$ et $(0, 1, 1)$. En donner une équations cartésienne.*

Exercice 24. *Soit S le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$ et $(0, 1, 1, 0)$. En donner une équations cartésienne.*

Exercice 25. *Donner le rang des familles suivantes de vecteurs :*

1. $(-1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$;
2. $(2, 1)$, $(1, 0)$, $(-2, 1)$;
3. $(1, 4, 3)$, $(3, 0, 1)$, $(4, 1, 2)$;
4. $(1, 1, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(4, 0, -1)$, $(-1, 0, 1)$;
5. $(0, 1, 1, 2)$, $(3, 1, 5, 2)$, $(-2, 1, 0, 1)$, $(1, 0, 3, -1)$.

Exercice 26. *Déterminer se $(1, 1, 1)$ appartient au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1, 3, 4)$, $(4, 0, 1)$, $(3, 1, 2)$.*

Exercice 27. *Donner une base de l'ensemble de solutions de*

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_4 & = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 0. \end{cases}$$

Exercice 28. *Décrire l'ensemble de solutions de*

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 & = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = 1. \end{cases}$$

Exercice 29. *Donner un système homogène dont l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^4$ est engendré par les vecteurs $(1, 1, 0, 1)$ et $(1, 0, 1, 1)$.*

4 *Image et noyau d'une application linéaire. Rang d'une matrice.*

Rang d'une matrice.
Définition de l'image et du noyau d'une application linéaire.
Théorème du rang.
Application aux systèmes linéaires.

Exercice 30. *Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires T, U de l'exercice 12.*

Exercice 31. *Soient S, T les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par :*

$$S(e_1) = e_1 + e_2, \qquad S(e_2) = -e_1 - e_2.$$
$$T(e_1) = e_1 - e_2, \qquad T(e_2) = 2e_2.$$

Soit U l'applications linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$U(e_1) = e_1 + e_2 - e_3, \qquad U(e_2) = e_2 - 3e_3, \qquad U(e_3) = -e_1 - 3e_2 - 2e_3.$$

1. *Donner le rang et la dimension du noyau de S, T, U.*
2. *Quelle sont inversibles ?*
3. *Donner une base des noyaux.*
4. *Donner une base des images.*