1 Suites

Version préliminaire des notes du cours "Mathématiques pour l'Électronique et l'Informatique II", première partie, par G. Carlet.

UNE **suite** est simplement une séquence de nombres (entiers, rationnels, réels, complexes, ...) ; par exemple

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \dots$$

est une suite de nombres entiers, et

$$\sqrt{2},\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt[4]{2},\ \sqrt[5]{2}, \dots$$

est une suite de nombres réels.

En général une suite

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \dots$$

est dénotée par $(u_n)_{n\geqslant 0}$, donc les suites ci-dessus peuvent être définies par

$$(2^n)_{n\geqslant 0}, \qquad (\sqrt[n+2]{2})_{n\geqslant 0}.$$

On considère aussi des suites définies à partir d'un certain entier naturel n_0, on note alors $(u_n)_{n\geqslant n_0}$; la deuxième suite ci-dessus peut aussi être définie par

$$(\sqrt[n]{2})_{n\geqslant 2}.$$

On a la définition suivante :

Définition de suite.

Une **suite** *de nombres réels* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *est une application* $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, *qui à l'indice n associe le nombre réel* u_n.

On appelle u_n **n-ème terme** ou **terme de rang** n de la suite.

D'autres exemples de suites :

- $(\sqrt{n})_{n\geqslant 0}$ est la suite de termes : $0,\ 1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \dots$
- $((-1)^n)_{n\geqslant 0}$ est la suite qui alterne $+1,\ -1,\ +1,\ \dots$
- Si on place une somme S à un taux annuel de 10%, la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $S_n = S \times (1,1)^n$ représente la somme S_n que l'on obtiendra après n années.
- Le précédent est un exemple de suite géométrique, c'est-à-dire une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de terme général $u_n = a^n$, où a est la raison de la suite, multiplié dans ce cas par une constante.
- Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ peut être aussi définie par une relation de récurrence, par exemple $u_{n+1} = u_n + 2$ et un terme initial $u_0 = a$. On obtient dans ce cas la suite arithmétique de raison 2 :

$$u_n = a + 2n.$$

Exercice 1. *Soit* $(a_k)_{k\geqslant 1}$ *la suite dont les premiers termes sont*

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \frac{1}{14}, \frac{1}{17}.$$

Trouver une formule explicite pour les a_k, $k \geqslant 1$.

Exercice 2. *Trouver le terme de rang n de la suite*

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots$$

Exercice 3. *Trouver le term de rang n de la suite*

$$1,\ 5,\ 1,\ 5,\ 1,\ \dots$$

On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est **majorée** s'il y a un nombre réel M tel que $u_n \leqslant M$ pour tout $n \geqslant 0$;

de même elle est **minorée** s'il y a un nombre réel M tel que $u_n \geqslant M$ pour tout n ;

et **bornée** si elle est majorée et minorée.

On peut aussi utiliser les **quantificateurs universel** ($\forall$) et **existentiel** ($\exists$), par exemple : une suite est bornée si $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ |u_n| \leqslant M$.

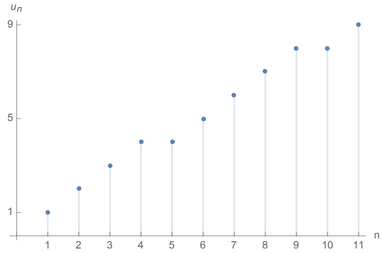


FIGURE 1: Une suite croissante, mais pas strictement croissante.

On parle aussi des suites croissantes, décroissantes, et monotones, strictement ou non :

on dit que une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est **croissante** si pour tout $n \geqslant 0$ on a $u_{n+1} \geqslant u_n$, et **strictement croissante** si $u_{n+1} > u_n$;

on dit que une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est **décroissante** si pour tout $n \geqslant 0$ on a $u_{n+1} \leqslant u_n$, et **strictement décroissante** si $u_{n+1} < u_n$;

une suite est **monotone** si elle est croissante ou décroissante, et **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou décroissante.

Exercice 4. *Montrer que la suite* $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ *est strictement décroissante. Montrer que elle est majorée par* 1*, et minorée par* 0*. Pour quelles valeurs de* n *les bornes sont atteintes ?*

Exercice 5. *Montrer que la suite* $((-1)^n/n)_{n\geqslant 1}$ *n'est ni croissante, ni décroissante. Montrer que elle est majorée par* $\frac{1}{2}$*, et minorée par* -1*. Pour quelles valeurs de* n *les bornes sont atteintes ?*

Exercice 6. *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *à termes strictement positifs est croissante si et seulement si* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$*, pour tout* $n \geqslant 0$*.*

Exercice 7. *La suite* $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\geqslant 0}$ *est-elle monotone ? Est-elle bornée ?*

Exercice 8. *La suite* $\left(\frac{n\sin(n)}{1+n^2}\right)_{n\geqslant 0}$ *est-elle bornée ?*

Exercice 9. *Déterminer si la suite* $(\frac{2}{3n+1})_{n\geqslant 0}$ *est croissante, décroissante, pas monotone, bornée ou pas bornée.*

Exercice 10. *Déterminer si la suite* $(\frac{n^2+2}{n^2+1})_{n\geqslant 0}$ *est croissante, décroissante, pas monotone, bornée ou pas bornée.*

Exercice 11. *Est-il vrai que une suite croissante est minorée ? Est-elle majorée ? Utiliser le principe d'induction.*

On a déjà vu le **principe d'induction** : soit $P(n)$ une propriété, si on a que : (1) $P(0)$ est vraie, (2) $P(n+1)$ est vraie si $P(n)$ est vraie, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

Exercice 12. *En utilisant le principe d'induction, montrer que* $2^n > n$*, pour tout* $n \geqslant 0$*.*

Exercice 13. *Soit* x *un réel positif. Montrer que la suite* $\left(\frac{x^n}{n!}\right)_{n\geqslant 0}$ *est décroissante à partir d'un certain rang.*

2 *Limite d'une suite*

On considère la suite $(1/n)_{n\geqslant 1}$, les premiers termes de la quelle sont :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

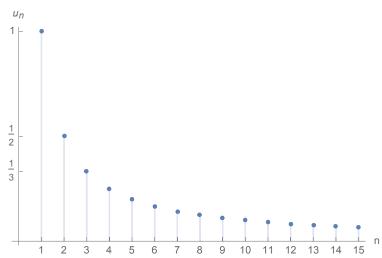


FIGURE 2: La suite $u_n = \frac{1}{n}$.

Evidemment quand n devient très grand $u_n = \frac{1}{n}$ se rapproche à zero. On dit que la suite $(1/n)_{n\geqslant 1}$ admet pour limite 0, ou qu'elle converge vers 0, ou qu'elle tend vers 0, et on écrit

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

ou

$$\frac{1}{n} \to 0.$$

Par contre la suite $((-1)^n)_{n\geqslant 0}$

$$+1,\ -1,\ +1,\ -1,\ +1,\ -1,\ +1,\ -1,\ \ldots$$

n'admet pas de limite, car elle continue à osciller entre les deux nombres ± 1 et ne se rapproche pas à un nombre.

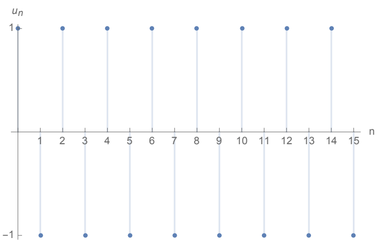


FIGURE 3: La suite $u_n = (-1)^n$.

LA DÉFINITION DE LIMITE d'une suite est la suivante :

La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ a pour **limite** $\ell \in \mathbb{R}$ *si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un entier naturel N tel que si $n \geqslant N$ alors $|u_n - \ell| < \epsilon$.*

Definition de limite d'une suite.

Autrement dit : *tout intervalle ouvert qui contient ℓ contient aussi tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.*

Evidemment l'inégalité $|u_n - \ell| < \epsilon$ est équivalent à $\ell - \epsilon < u_n < \ell + \epsilon$.

D'une manière symbolique, nous pouvons écrire :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \geqslant 0 \quad \forall n \geqslant N \quad |u_n - \ell| < \epsilon.$$

Si la suite (u_n) a pour limite le nombre réel ℓ, on dit aussi qu'elle **converge vers** ℓ, qu'elle **tend vers** ℓ, et on écrit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell,$$

ou

$$u_n \to \ell,$$

et on dit que la suite est **convergente**. Si une suite n'est pas convergent, alors on dit qu'elle est **divergente**.

Exercice 14. *En utilisant la définition de limite, montrer que la suite $(\frac{1}{n})_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.*

Exercice 15. *En utilisant la définition de limite, montrer que la suite $((-1)^n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas.*

On parle de **la limite** d'une suite, car si la limite existe il y a unicité :

Proposition. *Si une suite est convergente, sa limite est unique.*

Unicité de la limite.

On a aussi que :

Proposition. *Toute suite convergente est bornée.*

Toute suite convergente est bornée.

Exercice 16. *Démonstration que toute suite convergente est bornée. Soit (u_n) une suite telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.*

(1) En appliquant la définition de limite montrer qu'il existe un entier naturel N tel que pour tout $n \geqslant N$ on a $|u_n - \ell| < 1$.

(2) Utiliser l'inégalité triangulaire pour montrer que

$$|u_n| < |\ell| + 1.$$

Indication : écrire $u_n = u_n - \ell + \ell$.
(3) Montrer que

$$M = \max(|u_0|, \ldots, |u_{N-1}|, |\ell| + 1)$$

est une borne par la suite (u_n).

Propriétés des limites.

ON A DES PROPRIÉTÉS des limites en relation avec la somme et le produit : soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites convergentes :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = u, \qquad \lim_{n\to+\infty} v_n = v,$$

où u, v sont deux nombres réels. On a que les propriétés suivantes des limites sont vérifiées :

1. $\lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda u$, où λ est un nombre réel,
2. $\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = u + v$,
3. $\lim_{n\to+\infty}(u_n \cdot v_n) = u \cdot v$,
4. si $u_n \neq 0$, $n \geqslant 0$, et $u \neq 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u}$.

Exercice 17. *Si $u_n \to \ell$, calculer la limite de $u_n(1 - 3u_n) - \frac{1}{u_n^2+1}$, en utilisant les propriétés de la limite.*

ON A AUSSI des suites qui tends vers $+\infty$, ou vers $-\infty$, par exemple :

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots$$

tends vers $+\infty$. On peut donner les définitions suivantes :

Definition de limite $+\infty$.

La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$ si pour tout $A > 0$ il existe un entier naturel N tel que si $n \geqslant N$ alors $u_n \geqslant A$.

Definition de limite $-\infty$.

La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $-\infty$ si pour tout $A > 0$ il existe un entier naturel N tel que si $n \geqslant N$ alors $u_n \leqslant -A$.

On a donc que une suite divergente est une suite soit qui tend à $\pm\infty$, soit qui n'admet pas de limite.

On peut généraliser la proposition sur l'unicité de la limite au cas où la limite est finie ou infinie : si une suite admet la limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors cette limite est unique.

Exercice 18. *Écrire les définitions de limite $+\infty$ et $-\infty$ d'une manière symbolique, en utilisant les quantificateurs universel et existentiel.*

Propriétés des limites infinies.

On a des propriétés des limites infinies, en particulier :

5. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $u_n \neq 0$ une suite telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$.
6. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $u_n > 0$ une suite telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$.

Exercice 19. *En utilisant la définition de limite finie et infinie, prouver la propriété suivante : soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $u_n \neq 0$ une suite telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$.*

Exercice 20. *Expliquer pourquoi :*
(1) la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ où $u_n = \frac{1}{n^2}$ tend vers 0 et $\frac{1}{u_n}$ tend vers $+\infty$;
(2) la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ où $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ tend vers 0 et $\frac{1}{u_n}$ ne tend pas vers $+\infty$.

Les propriétés de la limite par rapport à la somme et au produit peuvent être généralisées au cas de limite infinie, mais ils faut éviter les formes indéterminées, comme $\infty - \infty$ ou $0 \cdot \infty$.

Soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$ une suite qui tend à $+\infty$.

7. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite minorée, alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = +\infty$,
8. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite minorée par un nombre $\lambda > 0$, alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n \cdot v_n) = +\infty$,

[Proposition 7 sur les inégalités et les limites. Théorème des gendarmes. Sec. 2.6 Exo7]

Théorème des gendarmes

Exercice 21. *En utilisant le théorème des gendarmes, trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de terme général :*

$$u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{1+n+n^2}.$$

Exercice 22. *Montrons que la suite $\left(\frac{2n+4}{2n+1}\right)_{n\geqslant 0}$ tend vers 1.*

Exercice 23. *Expliquer pourquoi la suite $\left(\frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}\right)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0.*

Exercice 24. *Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.*

Exercice 25. *Déterminer la limite des suites suivantes :*

$$\frac{2n+1}{n+2}, \quad \frac{n+\cos n}{n-\sin n}, \quad \sqrt{n+1}-\sqrt{n}.$$

Exercice 26. *En utilisant la définition de limite, montrer que*

$$\lim_{n\to+\infty} \ln n = +\infty.$$

Exercice 27. *Déterminer la limite de la suite :*

$$\frac{\cos n}{\sin n + \ln n}.$$

3 *La suite géométrique*

On fixe un réel a. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de terme général $u_n = a^n$ est appelée **suite géométrique** avec raison a.

Exercice 28. *Démontrer les propriétés suivantes de la suite géométrique de raison a :*

1. *Si $a = 1$, alors $u_n = 1$ pour tout $n \geqslant 0$.*
2. *Si $a > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.*
3. *Si $-1 < a < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.*
4. *Si $a \leqslant -1$, alors la limite pour $n \to +\infty$ n'existe pas.*

Indication : dans le cas $a > 1$ écrire $a = 1 + b$, $b > 0$ et, en utilisant la formule du binôme, montrer que $a^n \geqslant 1 + bn$. La propriété 3 suive facilement de la 2. La propriété 4 sera prouvé en utilisant les suites extraites.

Exercice 29. *Montrer que la suite de terme général $u_n \neq 0$, $n \geqslant 0$, tel que*

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \ell < 1, \quad n \geqslant 0,$$

converge vers 0.

Indication : écrire

$$\left|\frac{u_n}{u_0}\right| = \left|\frac{u_1}{u_0}\right| \cdot \left|\frac{u_2}{u_1}\right| \cdot \cdots \cdot \left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right|$$

et utiliser le théorème des gendarmes et la convergence de la suite géométrique.

Exercice 30. *À partir de l'exercice précédent, montrer que si la suite de terme général $u_n \neq 0$, $n \geqslant 0$ est tel que $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, alors $\lim u_n = 0$.*

Exercice 31. *En utilisant l'exercice précédent, montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, pour $a \in \mathbb{R}$.*

Exercice 32. *Montrer que, si $a > 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.*

Indication : dans le cas $a > 1$, écrire $a = 1 + b$, $b > 0$, et, en utilisant la formule du binôme, montrer que

$$\left(1 + \frac{b}{n}\right)^n \geqslant 1 + b = a.$$

4 *Suite monotone*

On a le résultat fondamental suivant :

Proposition. *Toute suite croissante et majoré est convergente.*

La preuve de ce résultat repose sur une propriété caractéristique de l'ensemble des nombres réels, c'est-à-dire que *un ensemble des nombres réels non vide majorée admet toujours une borne supérieure.* On peut facilement prouver que la borne superieur de l'ensemble image de la suite $\{u_n,\ n \geqslant 0\}$ coincide dans ce cas avec la limite de la suite.

On a aussi des résultats similaires :

— Toute suite décroissante et minorée est convergente.

— Une suite croissante et qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$.

— Une suite décroissante et qui n'est pas minorée tend vers $-\infty$.

Exercice 33. *Soit $(u_n)_{n\geqslant 2}$ la suite de terme général*

$$u_n = \frac{\ln 4}{\ln 5} \cdot \frac{\ln 6}{\ln 7} \cdot \cdots \cdot \frac{\ln(2n)}{\ln(2n+1)}.$$

Montrer que cette suite est monotone et bornée, donc convergente.

Exercice 34. *Montrer que : soit (s_n) une suite croissante, et (v_n) une suite convergente telle que $s_n \leqslant v_n$ pour tout $n \geqslant 0$, alors (s_n) converge.*

Exercice 35. *Montrer que une suite croissante et qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$.*

Indication : écrire la définition de suite majorée, et faire sa négation logique. Après utiliser la propriété de croissance de la suite.

5 Approximation des réels par des décimaux

Soit a un nombre réel. On peut définir une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ appelée **approximation décimale de** a, en posant

$$u_n = \frac{E(10^n a)}{10^n},$$

où $E(x)$ est la partie entière de x. On a que

La **partie entière** $E(x)$ d'un nombre réel x est le nombre entier n tel que $n \leqslant x < n+1$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a.$$

Par exemple, la suite

$$\begin{aligned}
u_0 &= \frac{E(10^0\pi)}{10^0} = E(\pi) = 3\\
u_1 &= \frac{E(10^1\pi)}{10^1} = \frac{E(31,415\dots)}{10} = 3,1\\
u_2 &= \frac{E(10^2\pi)}{10^2} = \frac{E(314,15\dots)}{100} = 3,14\\
u_3 &= 3,141
\end{aligned}$$

converge vers $\pi = 3,141592...$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \pi.$$

Exercice 36. *Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite d'approximation décimale du nombre réel a, définie par*

$$u_n = \frac{E(10^n a)}{10^n},$$

où $E(x)$ est la partie entière de x. Montrer que :

(1) u_n est croissante ;

(Indication : à partir de $10^n a \geqslant E(10^n a)$, multiplier par 10, et prendre la partie entière.)

(2) u_n est bornée ;

(3) conclure que u_n est convergente.

Exercice 37. *Soit a un réel. À partir de la définition de partie entière $E(x)$, montrer que :*

(1) $E(10^n a) \leqslant 10^n a < E(10^n a) + 1$ pour tout $n \geqslant 0$;

(2) $u_n \leqslant a < u_n + \frac{1}{10^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où (u_n) est la suite d'approximation décimale de a ;

(4) encadrer la suite de terme général $a - u_n$;

(3) en utilisant le théorème des gendarmes, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a.$$

6 Suites extraites et théorème de Bolzano-Weierstrass

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite. Une **suite extraite** *ou* **sous-suite** *de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de la forme $(u_{\phi(n)})_{n\geqslant 0}$, où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.*

Definition de suite extraite.

Par exemple, soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite divergente de terme général $u_n = (-1)^n$. On peut définir :

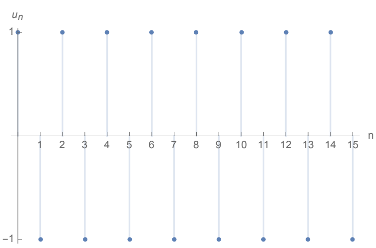


FIGURE 4: La suite $u_n = (-1)^n$.

— la sous-suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$, définie par $v_n = u_{2n} = (-1)^{2n} = 1$, qui est constante ;
— la sous-suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ avec $w_n = u_{2n+1}$, qui est constante égale à -1 ;
— la sous-suite $(z_n)_{n\geqslant 0}$ avec $z_n = u_{3n} = (-1)^{3n} = (-1)^n$, qui est égale à $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Proposition. *Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite convergente, alors toute suite extraite est convergente avec la même limite.*

Autrement dit : si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_{\phi(n)} = \ell$ pour toute fonction strictement croissante $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Corollaire. *Si une suite admet une sous-suite divergente, ou bien elle admet deux sous-suites convergentes vers des limites distinctes, alors elle diverge.*

Nous voyons de l'exemple ci-dessus que la suite $((-1)^n)_{n\geqslant 0}$ admet deux sous-suites constantes, qui convergent vers $+1$ et -1, donc cette suite est divergente.

On a déjà vu que *toute suite convergente est bornée*. Au contraire une suite bornée n'est pas nécessairement convergente, mais cependant on a le très important résultat suivant :

Théorème (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**.** *Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.*

Par exemple, le théorème affirme qu'il existe une sous-suite convergente de la suite $(\cos(n))_{n\geqslant 0}$, mais ce n'est pas évident.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle ; s'il existe un sous-suite $(u_{\phi(n)})_{n\geqslant 0}$ qui converge vers le nombre λ, alors λ s'appelle **valeur d'adhérence** de la suite. Le théorème de Bolzano-Weierstrass peut être reformulé en disant que *toute suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence.*

Par exemple, la suite

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots \frac{n-1}{n}, \cdots$$

admet tout réel de $[0, 1]$ comme valeur d'adhérence.

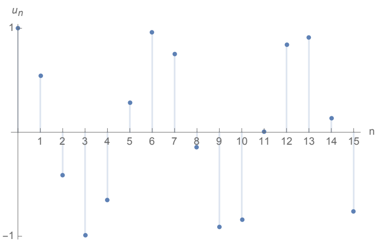


FIGURE 5: La suite $u_n = \cos(n)$.

Exercice 38. *Montrer que la quite $((-1)^n)_{n\geqslant 0}$ est divergente, en utilisant les suites extraites.*

Exercice 39. *Soit $N \geqslant 1$ un entier et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de terme général $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{N}\right)$. Montrer que la suite diverge.*

Exercice 40. *Montrer que la suite*

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}, \cdots$$

admet les valeurs d'adhérence 0 et 1.

Exercice 41. *La suite $\left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle ? Admet-elle des suites extraites convergentes ?*

Exercice 42. *Montrer que la suite géométrique de terme général a^n avec $a \leqslant -1$ n'admet pas de limite.*

Exercice 43. *Montrer le résultat suivant : si les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ convergent vers la même limite ℓ (finie ou infinie), alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ.*

7 Suites et continuité

La continuité d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ au point $x \in \mathbb{R}$ peut être définie aussi en utilisant les suites convergentes :

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue au point $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ convergeant vers x, la suite des images $(f(u_n))_{n \geqslant 0}$ converge vers $f(x)$.

Normalement on utilise ce résultat pour calculer des limites. Par exemple la suite de terme général $\sqrt{1+\frac{1}{n}}$ est égale à la suite image de la suite $(\frac{1}{n})$ par la fonction $f(x) = \sqrt{1+x}$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} = f(0) = 1$.

Exercice 44. *Calculer la limite de la suite de terme général :*

$$\frac{2n}{n\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \sqrt{n(n+1)}}.$$

Exercice 45. *Calculer la limite de la suite de terme général :*

$$\frac{2n+\cos(n)}{n\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \sqrt{(n+1)(n+2)}}.$$

8 Suite récurrente définie par une fonction

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par une **relation de récurrence**

$$u_{n+1} = f(u_n), \quad n \geqslant 0$$

et une **condition initiale** u_0.

La suite s'écrit ainsi :

$$u_0, \quad u_1 = f(u_0), \quad u_2 = f(u_1) = f(f(u_0)), \quad \ldots$$

Dans le cas où $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on peut aussi définir une suite par récurrence, mais il faut que l'intervalle I soit stable par f. On dit que l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est **stable** par f si $f(I) \subset I$, c'est-à-dire que si $x \in I$ alors son image $f(x)$ reste dans I. On remarque que si l'intervalle I est bornée, alors la suite définie par récurrence est aussi bornée.

Si l'intervalle I n'est pas stable par f on peut trouver un valeur $x \in I$ tel que $f(x) \notin I$, donc on ne peut pas définir le prochain terme de la suite.

Dans le cas où f est une fonctions continue, lorsque (u_n) admet une limite, elle doit être nécessairement un point fixe de f :

Proposition. *Si f est une fonction continue et la suite récurrente (u_n) converge vers ℓ, alors ℓ est un* **point fixe** *de f, c'est à dire*

$$f(\ell) = \ell.$$

Démonstration. Si $u_n \to \ell$, comme f est continue, alors $f(u_n) \to f(\ell)$, donc la limite de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ est $\ell = f(\ell)$. □

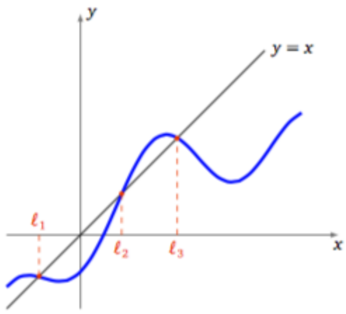
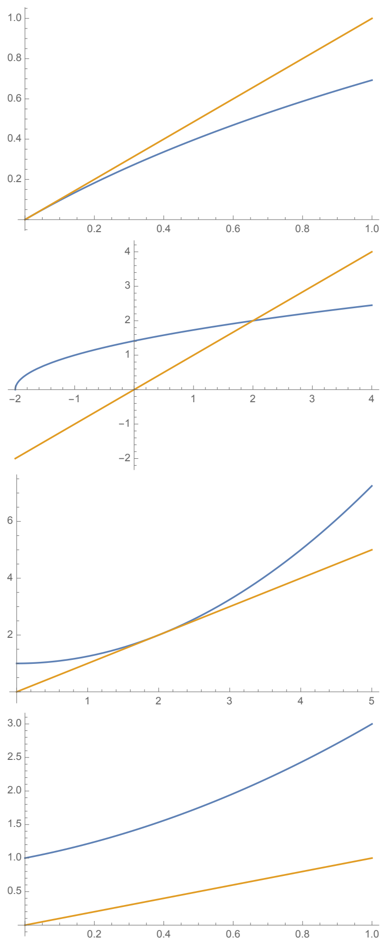


FIGURE 6: Une fonction avec trois points fixes.

Nous allons étudier en détail le cas où la fonction f est continue et croissante. On peut facilement vérifier que :
si $u_1 \geqslant u_0$ alors (u_n) est croissante,
si $u_1 \leqslant u_0$ alors (u_n) est décroissante.
On à donc dans ce cas que la suite est monotone, et si elle est aussi bornée, alors elle converge et, comme on a vu ci-dessus, elle doit converger vers un point fixe de f.



Proposition. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et croissante définie sur une intervalle I stable par f, alors la suite récurrente $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone et bornée, et converge vers $\ell \in I$ vérifiant $f(\ell) = \ell$.*

Exercice 46. *Étudier la suite définie par la relation de récurrence*

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$$

avec condition initiale $x_0 = 1$. On regardera ce qui se passe si l'on change de condition initiale.

Exercice 47. *Étudier les suites suivantes - suite bien définie (intervalle stable), monotonie, convergence, limite - en débutant par un dessin.*

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \ln(1+u_n), \quad 0 \leqslant u_0 \leqslant 1, \\
v_{n+1} &= \sqrt{2+v_n}, \quad v_0 \geqslant -2, \\
w_{n+1} &= 1 + \frac{1}{4}w_n^2, \quad w_0 \geqslant 0, \\
z_{n+1} &= 1 + z_n + z_n^2, \quad z_0 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

9 *Exemple : La suite de Fibonacci*

La *suite de Fibonacci* est une suite où chacun terme est donné par la somme des deux termes précédentes :

$$0, \ 1, \ 1, \ 2, \ 3, \ 5, \ 8, \ 13, \ 21, \ \ldots$$

Elle est donc définie par une relation de récurrence linéaire à trois termes et des conditions initiales :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \quad u_0 = 0, \quad u_1 = 1.$$

La suite de Fibonacci doit son nom à Leonardo Fibonacci ou Léonard de Pise (1175 - 1250), qui l'avait introduite dans l'ouvrage *Liber abaci* publié en 1202.

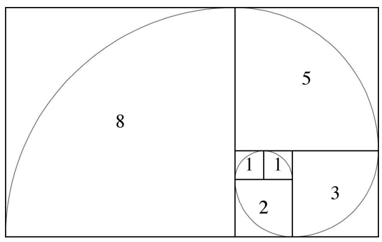


Figure 7: La spirale de Fibonacci est une approximation de la spirale d'or.

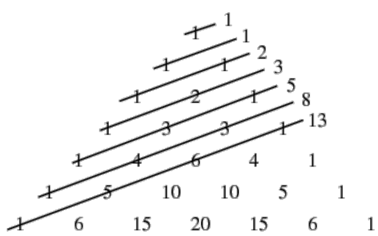


Figure 8: La suite de Fibonacci dans le triangle de Pascal.

10 *Suites récurrentes linéaires à trois termes*

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite définie par la relation de récurrence

$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}, \quad n \geqslant 2,$$

où a et b sont deux réels fixés.

L'idée est de chercher des suites géométriques vérifiant la relation de récurrence. Soit donc $(r^n)_{n\geqslant 0}$ une suite géométrique, par substitution et en simplifiant par r^n on obtient **l'équation caractéristique** :

$$r^2 - ar - b = 0.$$

C'est une équation algébrique de degré deux dont le discriminant vaut
$$\Delta = a^2 + 4b.$$

On a donc trois cas :

— $\Delta > 0$: l'équation caractéristique a deux racines réelles r_1, r_2 distinctes $r_1 \neq r_2$;

— $\Delta = 0$: l'équation caractéristique a une racine réelle double r_d ;

— $\Delta < 0$: l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées
$$r = qe^{i\theta}, \qquad \bar{r} = qe^{-i\theta}.$$

On peut facilement vérifier le résultat suivant :

Proposition. *Le terme général de la suite définie par la relation de récurrence linéaires à trois termes*
$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}, \quad n \geqslant 2,$$
où a et b sont deux réels fixés, est :

— $\Delta > 0$: $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$;

— $\Delta = 0$: $u_n = r_d^n(\lambda n + \mu)$;

— $\Delta < 0$: $u_n = q^n(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$;

où λ, μ sont deux constantes réelles déterminées par les conditions initiales sur u_0, u_1.

Exercice 48. *(Formule de Binet) En utilisant les formules pour les suites récurrentes linéaires à trois termes, donner le terme général de la suite de Fibonacci.*

Exercice 49. *Montrer que*
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
ou u_n est la suite de Fibonacci. Le nombre ϕ s'appelle nombre d'or.

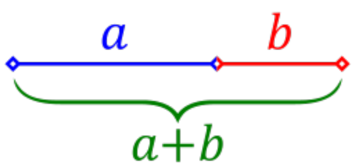
Exercice 50. *Donner le terme général des suites définies par*
$$u_n = u_{n-1} - u_{n-2},$$
$$u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2},$$
avec $u_0 = u_1 = 1$.

Exercice 51. *Donner l'expression du terme de rang n de chacune des suites suivantes :*
$$u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n, \quad u_0 = 0, \quad u_1 = 3;$$
$$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n, \quad u_0 = 5, \quad u_1 = 6;$$
$$u_{n+2} = -9u_n, \quad u_0 = 5, \quad u_1 = 1.$$

Exercice 52. *On considère la relation :*
$$s_{n+2} = 12s_{n+1} - 20s_n. \tag{1}$$

1. *Trouver deux suites géométriques $(q^n)_{n\geqslant 0}$, $q \in \mathbb{R}$, qui satisfont à (1).*
2. *Trouver la suite $(s_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant à (1) et telle que $s_0 = 2$ et $s_1 = 12$.*
3. *Déterminer la limite :*
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n}.$$

Le **nombre d'or** ou section dorée ou proportion dorée ϕ est définie comme l'unique rapport a/b entre deux longueurs a et b telles que le rapport de la somme $a+b$ des deux longueurs sur la plus grande a soit égal à celui de la plus grande sur la plus petit b, c'est-à-dire :
$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}.$$



On trouve que $\phi = a/b$ est l'unique solution positive de l'équation $x^2 = x + 1$, donc
$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618.$$

Notamment :
$$\phi = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}}}}}}}$$

11 Séries

Nous allons nous intéresser à des sommes ayant une infinité de termes. Par exemple, la somme

$$1+1+1+1+\dots$$

évidemment ne peut pas être égale à un nombre réel, car elle est infinie.

Mais on peut aussi considérer la somme

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$$

Dans l'antiquité on pensait que cette somme d'un nombre infini de quantités pas nulles était aussi infinie. (Le paradoxe de la dichotomie de Zénon d'Elée, début du V^e siècle av. J.-C.)

En effet, la somme des premiers $n+1$ termes est

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}.$$

Si on prend la limite on obtient

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

Donc cette somme d'un nombre infini de termes est égale à 2.

Soit (u_n) une suite. On appelle **série** de terme général u_n la **suite des sommes partielles**

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k.$$

On dit que la série et **convergente** si la suite des sommes partielles est convergente, et on appelle cette limite la **somme** de la série :

$$\sum_{k=0}^{\infty}u_k=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}u_k.$$

Exercice 53. *Montrer que la somme d'un nombre fini des réels est linéaire, c'est-à-dire :*

$$\sum_{k=0}^{n}(\lambda a_k+\mu b_k)=\lambda\sum_{k=0}^{n}a_k+\mu\sum_{k=0}^{n}b_k$$

pour tout $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. En prenant la limite montrer que si $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$ et $\sum_{k=0}^{\infty}b_k$ sont deux séries convergentes, alors la suite $\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda a_k+\mu b_k)$ converge vers $\lambda\sum_{k=0}^{\infty}a_k+\mu\sum_{k=0}^{\infty}b_k$.

12 La série géométrique

Soit $a\in\mathbb{R}$. La série géométrique est convergente si et seulement si $-1<a<1$, et dans ce cas

$$\sum_{k=0}^{+\infty}a^k=\frac{1}{1-a}.$$

Exercice 54. *Calculer la suite des sommes partielles de la série géométrique $\sum_{k=0}^{+\infty}a^k$. Montrer que la série est convergente si $-1<a<1$ et trouver la somme.*

13 Somme télescopique

Une somme télescopique est une séries de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_{k+1}-a_k);$$

elle converge si et seulement si la suite (a_k) converge. On a que

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_{k+1}-a_k) = a - a_0$$

où $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$.

Exercice 55. *Soit (S_n) la suite des sommes partielles de la somme télescopique $\sum_{k=0}^{\infty}(a_{k+1}-a_k)$. Montrer que $S_n = a_{n+1} - a_0$.*

Exercice 56. *En écrivant la série $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)}$ comme une somme télescopique, calculer sa somme.*

14 Le terme d'une série convergente tend vers 0

Si la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 57. *Soit (S_n) la suite des sommes partielles de la série convergente $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$. Montrer que $u_n = S_n - S_{n-1}$. En prenant la limite montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.*

Exercice 58. *Montrer que les séries*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty}3^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k}+(-1)^k), \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{k+1}, \quad \sum_{k=0}^{\infty}k\cos(k)$$

sont divergentes.

15 La série harmonique

La série harmonique

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

est divergente.

Exercice 59. *Soit (S_n) la suite des sommes partielles de la série harmonique $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, et soit $(T_m)_{m\geqslant 0}$ la sous-suite de terme général $T_m = S_{2^m}$. Montrer par récurrence que $T_m \geqslant 1 + m/2$. Conclure que la série harmonique est divergente.*

16 Séries à termes positifs

Soit $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ une séries à **termes positifs**, c'est-à-dire $u_k \geqslant 0$, pour tout $n \geqslant 0$. Alors la suite (S_n) de ses sommes partielles est croissante, car :

$$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0.$$

Comme on a déjà vu que une suite croissante est convergente (si elle est majorée) ou tend vers $+\infty$ (si elle n'est pas majorée), alors on a que :

une série à termes positifs est convergente si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

On peut utiliser le théorème de comparaison des suites pour montrer le théorème suivant :

Théorème (Théorème de comparaison). *Soient $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ deux séries à termes positifs, et telles que $u_k \leqslant v_k$ pour tout $k \geqslant 0$; alors on a que :*

— *si $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ converge, alors $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge ;*

— *si $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ diverge, alors $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ diverge.*

Exercice 60. *Montrer que $k^2 \geqslant k(k-1)$ si $k \geqslant 2$. En utilisant le théorème de comparaison conclure que la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ est convergente.*

Exercice 61. *Montrer que $\frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}$ si $k \geqslant 1$. Conclure que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ est divergente.*

Exercice 62. *Montrer que $\ln(k) \geqslant 1$ si $k \geqslant 3$. Conclure que la série $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$ est divergente.*

17 *La série exponentielle*

La série exponentielle

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

est convergente.

Exercice 63. *Montrer que $\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}$ si $k \geqslant 2$. En utilisant le théorème de comparaison conclure que la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}$ est convergente, donc $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ est convergente.*