Version préliminaire des notes du cours "Mathématiques pour l'Électronique et l'Informatique II", deuxième partie, par G. Carlet.

1 Matrices

Définition de matrice, taille, coefficients.

Matrices carrées, diagonale principale.

Matrice ligne et colonne.

Matrice nulle.

Somme de deux matrices. Produit d'une matrice par un scalaire. Propriétés. Matrice opposée, difference.

Matrice transposée, matrice symétrique.

Exercice 1. *Soient* $A, B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ *définies par*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 7 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculer $2A$, $-B$, $A+B$, $A-B$.

Exercice 2. *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 21 & -1 \\ 0 & 3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}, \quad D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calculer toutes les sommes possibles de deux de ces matrices. Calculer $3A + 2C$ *et* $5B - 4D$. *Trouver* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que* $A - \alpha C = 0$.

Exercice 3. *Montrer que si* $A + B = A$, *alors* $B = 0$.

Exercice 4. *Soit* $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. *Calculer* $0 \cdot A$, $1 \cdot A$ $(0, 1 \in \mathbb{R})$. *Montrer que* $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

2 Multiplication de matrices

Produit de deux matrices. Produit scalaire.

Propriétés du produit : associativité, distributivité par rapport à la somme.

La matrice identité, le symbole de Kronecker.

Puissance d'une matrice, matrices qui commutent, formule du binôme.

Suite de Fibonacci et matrices.

Exercice 5. *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer AB, BA, CB, AC, $A(CB)$, $(AC)B$.

Exercice 6. *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer AB, BA.

Exercice 7. *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $AB - BA$. *Calculer* $(AB)^T - B^T A^T$.

Exercice 8. *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 2 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}.$$

Calculer tous produits possibles.

Exercice 9. *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2, B^2, BA.

Exercice 10. *On travaille sur* $\mathbb{C}$. *Calculer*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Montrer par récurrence que* $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Écrire* $A = 1 + B$ *et montrer le même resultat en utilisant la formule du binôme de Newton.*

Exercice 12. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2, A^4, A^{66}.

Exercice 13. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer A^p.

Exercice 14. *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^p, B^p *pour tout* $p \geqslant 0$. *Montrer que* A *et* B *commutent. Calculer* $(A+B)^p$.

Exercice 15. *Soit* j *le nombre complexe* $e^{\frac{2\pi i}{3}}$. *Calculer :*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16. *Soient* $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ *telles que pour tout vecteur colonne* $u \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, *on ait* $Au = Bu$. *Montrer que* $A = B$.

Indication : utiliser les vecteurs colonnes $e_1 = (1,0,0)^T$, $e_2 = (0,1,0)^T$, $e_3 = (0,0,1)^T$.

Exercice 17. *Soit* A *une matrice réelle* 2×2. *Si pour toute matrice colonne réelle* $x \in M_{2,1}(\mathbb{R})$ *on a* $x^T A x = 0$, *a-t-on nécessairement* $A = 0$? *Que peut-on dire de* A *si on supposait que pour toutes* $x, y \in M_{2,1}(\mathbb{R})$, $x^T A y = 0$?

Exercice 18. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $v_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *pour tout* $n \geqslant 0$*. Soit* $v_n = \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \end{pmatrix}$*. Montrer que* v_n^2 *est la suite de Fibonacci.*

3 *Systèmes linéaires*

Introduction :
deux droites dans le plan, résolution par substitution,
deux plans dans l'espace, résolution par substitution,
résolution par la méthode de Cramer.

théorie des systèmes linéaires : équation linéaire à p inconnues, système de n équations, coefficients, équation matricielle équivalente, ensemble des solutions du système, systèmes équivalentes, opérations élémentaires sur les systèmes, système échelonné et réduit, méthode de Gauss.

Exercice 19. *Résoudre, si possible, les systèmes d'équations linéaires suivants :*

1. $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x - 7y = -2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ -6x - 4y = 2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ -6x - 4y = -2 \end{cases}$

Exercice 20. *Résoudre, si possible, les systèmes d'équations linéaires suivants :*

1. $\begin{cases} 2x + 3y - 4z & = 7 \\ 4x + 6y - 8z & = -1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x + 3y - 4z & = 7 \\ 4x + 6y - 8z & = 14 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 7x + 2y - 2z & = 1 \\ 2x + 3y + 2z & = 1 \end{cases}$

Exercice 21. *Tracer les droites d'équations*

$$\begin{cases} x - 2y & = -1 \\ -x + 3y & = 3 \end{cases}$$

et résoudre le système de deux façons différentes : par substitution et avec la méthode de Cramer.

Exercice 22. *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Ecrire et résoudre le système linéaire associé à l'équation :

$$AX = B.$$

Exercice 23. *Résoudre le système*

$$\begin{cases} x + y & = 1 \\ x + t^2 y & = t \end{cases}$$

suivant la valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$*. Utiliser la méthode de Cramer, si possible.*

Exercice 24. *Résoudre suivant la valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} 4x - 3y & = t \\ 2x - y & = t^2 \end{cases}$$

Exercice 25. *Résoudre suivant la valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} tx - y & = 1 \\ x + (t-2)y & = -1 \end{cases}$$

Exercice 26. *Résoudre suivant la valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} (t-1)x + y & = 1 \\ 2x + ty & = -1 \end{cases}$$

Exercice 27. *Utiliser les opérations élémentaires sur les équations des systèmes suivants pour les transformer en systèmes équivalents échelonnés réduits. Trouver l'ensemble des solutions.*

1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 & = 5 \\ -x_2 - 2x_3 & = 4 \\ 3x_4 & = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 & = 5 \\ -2x_3 & = 4 \\ x_3 + x_4 & = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_3 & = 25 \\ x_2 - 2x_3 & = 16 \\ x_4 & = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y + 7z & = -1 \\ 2x - y + 5z & = -5 \\ -x - 3y - 9z & = -5 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -x_2 + 2x_3 + 13x_4 & = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 & = 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 20x_4 & = -1 \end{cases}$

Exercice 28. *Résoudre les systèmes suivants par la méthode du pivot de Gauss :*

1. $\begin{cases} 2x + y + z & = 3 \\ x - y + 3z & = 8 \\ x + 2y - z & = -3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 2x_4 & = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 4x_4 & = 2 \\ 5x_1 + 10x_2 - 11x_3 + 6x_4 & = 3 \end{cases}$

Exercice 29. *Résoudre les systèmes échelonnés suivants :*

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 & = 0 \\ x_2 + x_3 & = 0 \\ 2x_3 + x_4 & = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 & = 0 \\ 2x_3 - 3x_4 & = 0 \end{cases}$

4 Inverse d'une matrice

Définition de l'inverse d'une matrice,
propriétés de l'inverse : unicité, inverse d'un produit, simplification
formule pour l'inverse d'une matrice 2×2,
méthode de Gauss pour inverser les matrices,
résolution de système linéaire par inversion de matrices.

Exercice 30. *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^{-1}, B^{-1}, $(AB)^{-1}$, $(BA)^{-1}$, A^{-2}.

Exercice 31. *En utilisant la définition de matrice inverse, calculer l'inverse de la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 32. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $2A - A^2$. *Sans calculs, deduire* A^{-1}.

Exercice 33. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2 *et vérifier que* $A^2 = A + 2$. *En déduire que* A *est inversible et calculer son inverse.*

Exercice 34. *Soit* $A = 1 + C \in M_n(\mathbb{R})$, *où* $C^2 = 0$. *Calculer l'inverse de* A.

Exercice 35. *Soit* $A = 1 + C \in M_n(\mathbb{R})$, *où* $C^3 = 0$. *Montrer que* $A^{-1} = 1 - C + C^2$.

Exercice 36. *Si possible calculer l'inverse des matrices :*

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha+1 & 1 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Exercice 37. *Soit* $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. *Calculer* $A(\theta)A(\theta')$ *et l'inverse de* $A(\theta)$.

Exercice 38. *Calculer l'inverse des matrices suivantes, en utilisant la méthode de Gauss :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Exercice 39. *Exprimer les systèmes linéaires suivants sous forme matricielle et les résoudre en inversant la matrice :*

$$\begin{cases} 2x + 4y = 7 \\ -2x + 3y = -14 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + z = 1 \\ -2y + 3z = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + t = \alpha \\ x - 2y = \beta \\ x + y + t = 2 \\ y + t = 4 \end{cases}.$$

Exercice 40. *En utilisant la méthode de Gauss, calculer l'inverse de* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & d \end{pmatrix}$.

Exercice 41. *On considère les matrices :*

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Résoudre les systèmes :

$$L \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Si $A = LU$, résoudre

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sans faire d'autres calculs.

Exercice 42. *Soit* $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et soit $(M^k)_{ij}$ le coefficient dans la ligne i et colonne j de la matrice M^k. Calculer M^2, M^3. Vérifier que $(M^k)_{ij}$ est le nombre de chemins de longueur k qui vont de i à j dans le graphe 1 à droite, pour $k = 1, 2, 3$.*

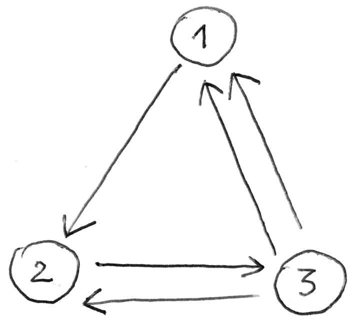

Figure 1: Graphe 1

Exercice 43. *Soit s_n le nombre de chemins de longueur n qui vont de 2 à 1 dans le graphe 2 à droite. Montrer que (s_n) est la suite de Fibonacci.*

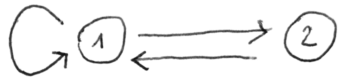

Figure 2: Graphe 2

Exercice 44. *Calculer A^k, $k \in \mathbb{Z}$, pour*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$